УДК 517.977:62-503.56

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ

С.Ч. Курманова

Исследованы вопросы однозначной разрешимости задачи синтеза при минимизации нелинейного квадратичного функционала, найдены условия оптимальности, разработан алгоритм построения решения нелинейной задачи синтеза.

Ключевые слова: задача синтеза оптимального управления; нелинейная оптимизация; краевая задача; обобщенное решение; задача Коши – Беллмана – Егорова.

SOLUTION OF SYNTHESIS PROBLEMS OF NONLINEAR OPTIMIZATION OF THERMAL PROCESSES

S.Ch. Kurmanova

The article studies questions of the unique solvability of synthesis problems while minimizing nonlinear quadratic functional. It was found the conditions for optimality, and developed an algoritm for constructing the solution of the nonlinear synthesis problem.

Key words: optimal control synthesis problem; nonlinear optimization; boundary value problem; generalized solution; the Cauchy – Bellman – Egorov problem.

Постановка задачи синтеза. Пусть управляемый процесс $V(t, x)$ описывается краевой задачей [1]:

$$V_t(t,x) = V_{xx}(t,x) + g(t,x)u^{2n-1}(t), \; 0 < x < 1, \; 0 < t \le T,$$
$$V(0, x) = \psi(x), \; 0 < x < 1, \qquad (1)$$
$$V_x(t, 0) = 0, \; v_x(t, 1) + \alpha V(t, 1) = 0, \; 0 < t \le T, \; \alpha > 0,$$

где $u(t) \in H(0,T)$ – функция управления, $|u(t)| \le 1, \; t \in [0,T], \; g(t,x) \in H(Q), \; \psi(x) \in H_1(0,1)$ – заданные функции; H – гильбертово пространство, H_1 – соболево пространство первого порядка, $Q = \{0 < x < 1, 0 < t \le T\}$, T – фиксировано, $n = 1, 2....$

Краевая задача (1) при каждом фиксированном управлении $u(t)$ имеет единственное обобщенное решение $V(t, x)$, удовлетворяющее интегральному тождеству

$$\int_0^1 \left(V(t,x)\Phi(t,x)\right)_{t_1}^{t_2} dx = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^1 \left[\Phi_t(t,x)V(t,x) - \Phi_x(t,x)V_x(t,x) + g(t,x)u^{2n-1}(t)\Phi(t,x)\right]dxdt - \alpha\int_{t_1}^{t_2}\Phi(t,1)V(t,1)\,dt \qquad (2)$$

для любых моментов времени t_1 и t_2 $(0 \le t_1 \le t_2 \le T)$ и любой функции $\Phi(t,x) \in H_1(Q)$, и в слабом смысле – начальному условию краевой задачи (1), т. е. для любой функции $\Phi_0(x) \in H(0,1)$.

$$\lim_{t\to 0}\int_0^1 \left[V(t,x) - \psi(x)\right]\Phi_0(x)\,dx = 0,$$

которое имеет вид

$$V(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\psi_n e^{-\lambda_n^2 t} + \int_0^t g_n(t)e^{-\lambda_n^2(\tau - t)}u^{2n-1}(\tau)d\tau\right]z_n(x), \qquad (3)$$

где ψ_n, $g_n(t)$ – коэффициенты Фурье соответственно функций $\psi(x)$ и $g(\mathrm{t}, x)$; $\{z_n(x)\}$ – полная в $H(Q)$ ортонормированная система обобщенных собственных функций, $\{\lambda_n\}$ – соответствующая система собственных значений краевой задачи

$$z'' + \lambda^2 z = 0\,,\ 0 < x < 1, \tag{4}$$
$$z'(0) = 0,\ z'(1) + \alpha z(1) = 0,\ \alpha < 0.$$

Рассмотрим следующую задачу синтеза: требуется найти такое управление $u^0(t) \in H(0,T)$, которое вместе с соответствующим решением $V^0\ (t,\ x)$ краевой задачи (1) минимизирует функционал

$$J(u) = \int_0^1 [V(T,x) - \xi(x)]^2\,dx + \beta\int_0^T \left(1 - u^2(t)\right)dt,\ \ \beta < 0, \tag{5}$$

где $\xi(x) \in H(0,1)$ – заданная функция; причем управление $u^0\ (t)$ следует определить как функцию от состояния управляемого процесса $V^0\ (t,\ x)$, т. е. в виде $u^0\ (t) = u^0\ [t,\ V^0\ (t,\ x)]$.

Для решения задачи синтеза воспользуемся методикой А.И. Егорова, разработанной для систем с распределенными параметрами [2], на основе принципа оптимальности Беллмана [3].

Согласно принципу оптимальности, введем функционал

$$S[t, V(t,x)] = \min_{\substack{|u(\tau)|\le 1\\ t\le\tau\le T}}\left\{\int_0^1 [V(T,x) - \xi(x)]^2\,dx + \beta\int_t^T \left(1 - u^2(\tau)\right)d\tau\right\},\ \beta < 0, \tag{6}$$

где $\xi(x) \in H(Q)$, t – произвольный момент времени, $t \in [0,T]$, причем $S[0,\psi(x)] = J(u^0)$.

Предполагая, что $S\ [t,\ V\ (t,\ x)]$ как функция дифференцируема по t, а по $V\ (t,\ x)$ как функционал дифференцируем по Фреше, получим уравнение Беллмана в виде [3; 4, с. 53–58]

$$-\frac{\partial S[t,V]}{\partial t} = \min_{\substack{|u(\tau)|\le 1\\ t\le\tau\le T}}\left\{\beta\left(1 - u^2(\tau)\right) - \int_0^1 V_x(t,x)\,m_x(t,x)\,dx + u^{2n-1}(t)\int_0^1 g(t,x)\,m(t,x)\,dx - \alpha V(t,1)\,m(t,1)\right\} \tag{7}$$

с дополнительным условием

$$S[T, V(T,x)] = \int_0^1 [V(T,x) - \xi(x)]^2\,dx, \tag{8}$$

где $m(t,x) \in H_1(Q)$ – градиент функционала $S\ [t,\ V]$.

Определим оптимальное управление $u^0\ (t)$, доставляющее минимальное значение функционалу $J\ (u)$.

Введем обозначения

$$\Pi(t,u) = \beta\left(1 - u^2(t)\right) + u^{2n-1}(t)\int_0^1 g(t,x)\,m(t,x)\,dx;$$

$$a(t) = \int_0^1 g(t,x)\,m(t,x)\,dx$$

и рассмотрим следующую задачу минимизации:

$$\Pi(t,u) = \left\{\beta\left(1 - u^2(t)\right) + u^{2n-1}(t)\,a(t)\right\} \to \min,\ \beta < 0,\ |u(t)| \le 1,\ \beta = 1,\,2,\,...,$$

при этом возможны случаи

1. $a\ (t) > 0,\ \ u^0\ (t) = -1$,
2. $a\ (t) > 0,\ \ u^0\ (t) = 1$.

Рассмотрим случай $a\ (t) > 0\ \ \ u^0\ (t) = -1$, тогда уравнение (7) примет вид

$$-\frac{\partial S[t,V]}{\partial t} = -a(t) - \int_0^1 V_x(t,x)\,m_x(t,x)\,dx - \alpha V(t,1)\,m(t,1). \tag{9}$$

Решение задачи Коши – Беллмана – Егорова (7)–(8) ищем в виде квадратичного функционала

$$S[t,V] = \int_0^1\int_0^1 V(t,x)\,\mathrm{K}(t,x,y)\,V(t,y)\,dy\,dx + \int_0^1 V(t,x)\,\mathrm{q}(t,x)\,dx + \eta(t)\,, \tag{10}$$

где $K\ (t,\ x,\ y)$, $q\ (t,\ x)$ и $\eta\ (t)$ – неизвестные функции, подлежащие определению, причем $K\ (t,\ x,\ y) = K\ (t,\ y,\ x)$.

Градиент функционала $S\ [t,\ V\ (t,\ x)]$ имеет вид

$$m(t,x) = \int_0^1 \left(K(t,x,y) + K(t,y,x)\right)V(t,y)\,dy + q(t,x)\cdot \tag{11}$$

Далее воспользуемся следующими разложениями:

$$K(t,x,y) = \sum_{i,k=1}^{\infty} z_i(x)\,R_{ik}(t)\,z_k(y) = z^*(x)\,R(t)\,z(y);$$

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t)z_n(x)=z^*(x)v(t);$$

$$q(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}q_n(x)z_n(x)=z^*(x)q(t); \quad (12)$$

$$g(\mathrm{t},x)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(t)z_n(x)=z^*(x)g(t);$$

$$\xi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n z_n(x)=z^*(x)\xi,$$

где $R(t)$ – бесконечномерная симметричная матрица, $v(t)=\{v_1(t), ..., v_n(t), ...\}$, $m(t)=\{m_1(t), ..., m_n(t), ...\}$, $z(x)=\{z_1(x), ..., z_n(x), ...\}$, $g(t)=\{g_1(t), ..., g_n(t), ...\}$, $q(t)=\{q_1(t), ..., q_n(t), ...\}$, $\xi=\{\xi_1, ..., \xi_n, ...\}$; * – знак транспонирования, при этом $\int_0^1 \mathrm{z}(x)\mathrm{z}^*(x)dx=E,$ где E – единичная матрица.

Согласно этим разложениям, (8)–(11) представим в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t}=g^*(t)\left[R(t)+R^*(t)\right]v(t)+g^*(t)q(t)+v^*(t)D(\lambda)\left[R(t)+R^*(t)\right]v(t)+v^*(t)D(\lambda)q(t), \quad (13)$$

где $D(\lambda)=diag\left(...,\lambda_n^2,...\right)$,

$$S\left[T,V(T,x)\right]=v^*(T)v(T)-2v^*(T)\xi+\xi^*\xi; \quad (14)$$

$$S\left[t,V(t,x)\right]=v^*(t)R(t)v(t)+v^*(t)q(t)+\eta(t), \quad (15)$$

$$m(t,x)=z^*(x)\left(v(t)\left[R(t)+R^*(t)\right]+q(t)\right). \quad (16)$$

Неизвестные функции $R(t)$, $q(t)$, $\eta(t)$ определяем из следующих задач:

$$\dot{R}(t)=\left[R(t)+R^*(t)\right]D(\lambda), \quad (17)$$

$$R(T)=\mathrm{E}:$$

$$\dot{q}(t)=g(t)\left[R(t)+R^*(t)\right]+q(t)D(\lambda), \quad (18)$$

$$Q(T)=-2\xi:$$

$$\dot{\eta}(t)=g^*(t)q(t), \quad (19)$$

$$\eta(T)=\xi^*\xi.$$

Задача (17) эквивалентна следующим задачам [5, с. 141–146]:

$$\dot{R}_{nn}(t)=2\lambda_n^2R_{nn}(t),\ \ R_{nn}(T)=1,\ \text{при } n=m;$$

$$\dot{R}_{nm}(t)=\lambda_n^2R_{nm}(t)+R_{nm}(t)\lambda_m^2,\ \ R_{nm}(T)=0,\ \text{при } n\neq m,$$

решение которых имеет вид

$$R(t)=diag\left(...,R_{nn}(t),...\right),\ \text{где } R_{nn}(t)=e^{-2\lambda_n^2(T-t)},\ n=1,2,3,...;\ R(t)=\theta. \quad (20)$$

Решение задачи (18), с учетом (20), имеет вид

$$q(t)=\{...,q_n(t),...\},\ \ q_n(t)=-2e^{\lambda_n^2t}\left(\int_t^T e^{-2\lambda_n^2(T-\tau)}g_n(\tau)d\tau+\xi_ne^{-\lambda_n^2T}\right). \quad (21)$$

Решение задачи (19), с учетом (21), находим по формуле

$$\eta(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_t^T\left[2e^{-\lambda_n^2\tau}g_n(\tau)\left(\int_\tau^T e^{-2\lambda_n^2(T-z)}g_n(z)dz-\xi_ne^{-\lambda_n^2T}\right)\right]d\tau\right]. \quad (22)$$

Тогда

$$a(t)=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-2\lambda_n^2(T-\tau)}g_n(\tau)\psi_n-e^{\lambda_n^2t}g_n(t)\left(\int_t^T e^{-2\lambda_n^2(T-\tau)}g_n(\tau)d\tau+\xi_ne^{-\lambda_n^2T}\right)\right);$$

решение задачи Коши – Беллмана – Егорова

$$S\left[t,V(t,x)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left[v_n^2(t)e^{-2\lambda_n^2(T-t)}-2v_n(t)e^{\lambda_n^2t}\left(\int_t^T e^{-2\lambda_n^2(T-\tau)}g_n(\tau)d\tau+\xi_ne^{-\lambda_n^2T}\right)+\right.$$

$$+\xi_n^2+\int_t^T\left(2e^{-\lambda_n^2\tau}g_n(\tau)\left(\int_\tau^T e^{-2\lambda_n^2(T-z)}g_n(z)\,dz-\xi_n e^{-\lambda_n^2 T}\right)\right)d\tau\Bigg];$$

$$V^0(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\psi_n e^{-\lambda_n^2 t}-\int_0^t g_n(t)\,e^{-\lambda_n^2(\tau-t)}d\tau\right]z_n(x);$$

функционал $J(u)$ на $u(t)=u^0(t)$

$$J\left(u^0\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\psi_n^2 e^{-2\lambda_n^2 T}-2\psi_n\left(\int_0^T e^{-2\lambda_n^2(T-\tau)}g_n(\tau)\,d\tau+\xi_n e^{-\lambda_n^2 T}\right)+\xi_n^2+\int_0^T\left(2e^{-\lambda_n^2\tau}g_n(\tau)\left(\int_\tau^T e^{-2\lambda_n^2(T-z)}g_n(z)\,dz-\xi_n e^{-\lambda_n^2 T}\right)\right)d\tau\right].$$

Пусть функция $\Pi(t, u)$ выпукла по переменной $u(t)$, а заданные функции $g(t,x)\in H(Q)$, $\psi(x)\in H_1(0,1)$, $\xi(x)\in H(0,1)$ такие, что выполняется условие $a(t)>0$, тогда задача синтеза имеет единственное решение в виде

$$\left[u^0(t),V^0(t,x),J\left(u^0\right)\right],$$

где $u^0(t)$, $V^0(t,x)$ и $J(u^0)$ определены выше.

Литература

1. *Тихонов А.Н.* Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М.: Наука, 1972. 735 с.
2. *Беллман Р.* Динамическое программирование / Р. Беллман. М.: Наука, 1945. 480 с.
3. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А.И. Егоров. М.: Наука, 1978. 463 с.
4. *Керимбеков А.* Об условиях оптимальности в нелинейно-квадратичной задаче синтеза при оптимизации тепловых процессов / А. Керимбеков // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. Сер. 3. Ест.-техн. науки. Вып. 3. Бишкек, 2005.
5. *Керимбеков А.К.* О разрешимости задачи синтеза оптимального управления тепловыми процессами при наличии разрывных коэффициентов / А.К. Керимбеков, С.Ч. Курманова // Проблемы автоматики и управления: материалы междунар. конф. “Проблемы управления и информационных технологий” / ИАИТ НАН КР. Бишкек, 2010. № 1.