

УДК 517.97

**О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ГРАНИЧНОГО ВЕКТОРНОГО УПРАВЛЕНИЯ
ТЕПЛОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ ВОЛЬТЕРРОВО
ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ**

А. Керимбеков, Сейдакмат кызы Э.

Исследованы вопросы разрешимости задачи нелинейного граничного векторного оптимального управления тепловыми процессами, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями. Установлены достаточные условия однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации.

Ключевые слова: краевая задача; функционал; векторное оптимальное управление; система нелинейных интегральных уравнений.

**THE SOLUTION OF THE BOUNDARY VECTOR CONTROL PROBLEM
FOR THE THERMAL PROCESSES, DESCRIBED BY VOLTERRA
INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS**

A. Kerimbekov, Seidakmat kyzy E.

It is investigated a questions of solvability of the nonlinear boundary vector optimal control problem for the thermal process, described by Volterra integro – differential equations. It is established the sufficient conditions for the unique solvability of the nonlinear optimization problem.

Key words: boundary value problem; the functional; optimal control; system of nonlinear integral equations.

1. Постановка задачи оптимального управления и условия оптимальности. Рассмотрим задачу оптимизации, где требуется минимизировать квадратичный интегральный функционал

$$L[\vartheta_1(t), \dots, \vartheta_m(t)] = \int_0^1 [v(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T \sum_{s=1}^m \vartheta_s^2(t) dt, \quad \beta > 0, \quad (1)$$

на множестве решений краевой задачи [1–3]:

$$v_t = v_{xx} + \lambda \int_0^t K(t, \tau) v(\tau, x) d\tau + g(t, x), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (2)$$

$$v(0, x) = \psi(x), \quad 0 < x < 1, \quad (3)$$

$$v_x(t, 0) = 0, \quad v_x(t, 1) + \alpha v(t, 1) = q[t, \vartheta_1(t), \dots, \vartheta_m(t)], \quad 0 < t \leq T. \quad (4)$$

Здесь $\xi(x) \in H(0, 1)$, $g(t, x) \in H(Q)$, $\psi(x) \in H(0, 1)$, $q[t, \vartheta_1(t), \dots, \vartheta_m(t)] \in H(0, T)$ – заданные функции, причем функция $q[t, \vartheta_1(t), \dots, \vartheta_m(t)]$ нелинейно зависит от вектор-функции управления

$\vartheta_1(t), \dots, \vartheta_m(t) \in H^m(0, T) = H(0, T) \times \dots \times H(0, T)$ и по функциональной переменной $\vartheta_1(t), \dots, \vartheta_m(t)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial q[t, \vartheta_1(t), \dots, \vartheta_m(t)]}{\partial \vartheta_s(t)} \uparrow 0, \quad s = 1, \dots, m, \quad \forall t \in [0, T], \quad (5)$$

ядро $p_1[t, \bar{u}(t)]$ – известная ограниченная функция, т. е.

$$K_0 = \sup_{(t, \tau) \in D} |K(t, \tau)|, \quad D = \{0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq \tau \leq T\}, \quad (6)$$

λ – параметр; постоянная $\alpha > 0$, T – фиксированный момент времени; $H(Y)$ – гильбертово пространство функций, определенных на множестве Y .

Оптимальное управление, согласно принципу максимума для систем с распределенными параметрами [4], определяется из следующего соотношения:

$$\Pi_u(\cdot; \vartheta_1(t), \dots, \vartheta_m(t)) = \frac{\partial q[t, \vartheta_1(t), \dots, \vartheta_m(t)]}{\partial \vartheta_s} \omega(t, 1) - 2\beta \vartheta_s(t) = 0, \quad s = 1, \dots, m, \quad (7)$$

а также, согласно критериям Сильвестра, удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} & \left| \Gamma \left[\Pi(\cdot; \vartheta_1(t), \dots, \vartheta_m(t)) \right] \right| = \\ & = (-2\beta)^s \prod_{s=1}^h q_{\vartheta_s} \dots \dots \dots > 0, \\ & \left(\begin{array}{ccc} \left(\frac{\vartheta_1}{q_{\vartheta_1}} \right)_{\vartheta_1} & \dots & \left(\frac{\vartheta_1}{q_{\vartheta_1}} \right)_{\vartheta_h} \\ \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{\vartheta_h}{q_{\vartheta_h}} \right)_{\vartheta_1} & \dots & \left(\frac{\vartheta_h}{q_{\vartheta_h}} \right)_{\vartheta_h} \end{array} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

где матрица Гесса $\Gamma \left[\Pi(\cdot; \vartheta_1(t), \dots, \vartheta_m(t)) \right]$ имеет вид

$$\begin{aligned} & \Gamma \left[\Pi(\cdot; \vartheta_1(t), \dots, \vartheta_m(t)) \right] = \\ & = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \vartheta_1 \partial \vartheta_1} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \vartheta_1 \partial \vartheta_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \vartheta_m \partial \vartheta_1} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \vartheta_m \partial \vartheta_m} \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \omega(t,1) \frac{\partial^2 q}{\partial \vartheta_1 \partial \vartheta_1} - 2\beta & \dots & \omega(t,1) \frac{\partial^2 q}{\partial \vartheta_1 \partial \vartheta_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega(t,1) \frac{\partial^2 q}{\partial \vartheta_m \partial \vartheta_1} & \dots & \omega(t,1) \frac{\partial^2 q}{\partial \vartheta_m \partial \vartheta_m} - 2\beta \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} -2\beta q_{\vartheta_1} \left(\frac{\vartheta_1}{q_{\vartheta_1}} \right)_{\vartheta_1} & \dots & -2\beta q_{\vartheta_1} \left(\frac{\vartheta_1}{q_{\vartheta_1}} \right)_{\vartheta_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ -2\beta q_{\vartheta_m} \left(\frac{\vartheta_m}{q_{\vartheta_m}} \right)_{\vartheta_1} & \dots & -2\beta q_{\vartheta_m} \left(\frac{\vartheta_m}{q_{\vartheta_m}} \right)_{\vartheta_m} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Функция $\omega(t, x)$ определяется как решение сопряженной краевой задачи

$$\begin{aligned} & \omega_t + \omega_{xx} + \lambda \int_t^T K(\tau, t) \omega(\tau, x) d\tau = 0; \\ & 0 < x < 1; 0 \leq t < T, \\ & \omega(T, x) + 2[v(T, x) - \xi(x)] = 0; \\ & 0 < x < 1 \\ & \omega_x(t, 0) = 0; \quad \omega_x(t, 1) + \alpha \omega(t, 1) = 0; \\ & 0 \leq t < T \end{aligned} \quad (9)$$

и имеет вид

$$\begin{aligned} \omega(t, x) = & -2 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\lambda \int_t^T J_n(s, t, \lambda) [v_n(T) - \xi_n] e^{-\lambda_n^2(T-s)} ds + \right. \\ & \left. + [v_n(T) - \xi_n] e^{-\lambda_n^2(T-t)} \right) z_n(x). \end{aligned} \quad (10)$$

Подробное исследование краевой задачи, получение условий оптимальности и исследование сопряженной краевой задачи были приведены в [5].

С учетом (10) перепишем условия оптимальности (7).

$$\begin{aligned} & \beta \vartheta_s(t) q_{\vartheta_s}^{-1} [t, \vartheta_1(t), \dots, \vartheta_m(t)] + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t, 1) \int_0^T G_n(\tau, 1) q [t, \vartheta_1(\tau), \dots, \vartheta_m(\tau)] d\tau = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t, 1) h_n, \\ & s = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$G_n^*(t, 1) = \left(e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda \int_t^T J_n(s, t, \lambda) e^{-\lambda_n^2(T-s)} ds \right) z_n(1), \quad (12)$$

$$G_n(t, 1) = \left(e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda \int_t^T R_n(T, s, \lambda) e^{-\lambda_n^2(s-t)} ds \right) z_n(1), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} h_n = & \xi_n - \psi_n \left(e^{-\lambda_n^2 T} + \lambda \int_0^T R_n(T, s, \lambda) e^{-\lambda_n^2 s} ds \right) - \\ & - \int_0^T G_n(\tau) g_n(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (14)$$

II. Исследование разрешимости системы нелинейных интегральных уравнений векторного оптимального управления. Система нелинейных интегральных уравнений (11) решается согласно методике, разработанной проф. А. Керимбековым [6]. Система равенств (11) обладает специфическим свойством, в частности, оно удовлетворяет системе равных отношений, т. е.

$$f(t) = \frac{\beta \vartheta_1(t)}{q_{\vartheta_1}} = \dots = \frac{\beta \vartheta_m(t)}{q_{\vartheta_m}}, \quad (15)$$

где $f(t)$ – некоторая функция.

Лемма 1. Функция $f(t)$ является элементом пространства $H(0, T)$.

Доказательство. В силу условия (5) имеет место оценка

$$\begin{aligned} & \left| q_{\vartheta_s}^{-1} [t, \vartheta_1(t), \dots, \vartheta_m(t)] \right| \leq M, \\ & \forall t \in [0, T], \quad s = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Так как $\vartheta_s(t) \in H^m(0, T)$, $s = 1, \dots, m$, то утверждение леммы следует из неравенства

$$\int_0^T f^2(t) dt \leq N_0 \beta^2 \int_0^T \vartheta_s^2(t) dt < \infty,$$

$$s = 1, \dots, m, \quad N_0 = \sup_{0 \leq t \leq T} \{q_{\vartheta_1}^{-1}, \dots, q_{\vartheta_m}^{-1}\}.$$

Заметим, что в силу монотонности функции $q [t, \vartheta_1(t), \dots, \vartheta_m(t)]$ по каждой функциональной переменной $\vartheta_1(t), \dots, \vartheta_m(t)$ и согласно условию

оптимальности (8) из систем равенств (15) каждая из функций $\vartheta_1(t), \dots, \vartheta_m(t)$ однозначно выражается через функцию $f(t)$, т. е. имеет место следующая система равенств:

$$\vartheta_1(t) = p_1[t, f(t), \beta],$$

$$(16)$$

$$\vartheta_m(t) = p_m[t, f(t), \beta].$$

Тогда на основе соотношений (15) и (16) из (11) относительной функции $f(t)$ имеем следующее соотношение:

$$f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t, 1) \int_0^T G_n(\tau, 1) q[\tau, p_1[\tau, f(\tau), \beta], \dots, p_m[\tau, f(\tau), \beta]] d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t, 1) h_n, \quad (17)$$

или в операторной форме

$$f(t) = S[f(t)] + h(t), \quad (18)$$

где

$$S[f(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t, 1) \int_0^T G_n(\tau, 1) q[\tau, p_1[\tau, f(\tau), \beta], \dots, p_m[\tau, f(\tau), \beta]] d\tau,$$

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t, 1) h_n. \quad (19)$$

Теперь исследуем вопросы однозначной разрешимости операторного уравнения (18).

Лемма 2. Функция $h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t, 1) h_n$ является элементом пространства $H(0, T)$.

Доказательство. Непосредственным вычислением имеем неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^T h^2(t) dt &= \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t, 1) h_n \right)^2 dt \leq \\ &\leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} (G_n^*(t, 1))^2 \sum_{n=1}^{\infty} h_n^2 dt \leq \\ &\leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\lambda_n^2} \left(1 + \frac{|\lambda|TK_0M_0}{2\lambda_1^2} \right) \\ &3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\xi_n^2 + 2\psi_n^2 \left(1 + \frac{|\lambda|K_0M_0}{(2\lambda_1^2)^2} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{2}{\lambda_n^2} \left(1 + \frac{|\lambda|TK_0M_0}{2\lambda_1^2} \right) \|g(t, x)\|_H^2 \right) \leq \\ &\leq 6 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left(1 + \frac{|\lambda|TK_0M_0}{2\lambda_1^2} \right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times \left[\|\xi(x)\|_H^2 + 2\|\psi(x)\|_H^2 \left(1 + \frac{|\lambda|K_0M_0}{(2\lambda_1^2)^2} \right) + \right. \\ &\left. + \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left(1 + \frac{|\lambda|TK_0M_0}{2\lambda_1^2} \right) \|g(t, x)\|_H^2 \right] < \infty, \end{aligned}$$

из которого следует утверждение леммы.

Лемма 3. Оператор $S[f(t)]$ отображает пространство $H(0, T)$ в себя, т. е. является элементом пространства $H(0, T)$.

Доказательство. Непосредственным вычислением имеем неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^T S^2[f(t)] dt &= \\ &= \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t, 1) \int_0^T G_n(\tau, 1) q[\tau, p_1[\tau, f(\tau), \beta], \dots, p_m[\tau, f(\tau), \beta]] d\tau \right)^2 dt \leq \\ &\leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} (G_n^*(t, 1))^2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T G_n^2(\tau, 1) d\tau \\ &d\tau dt \leq \int_0^T q^2[\tau, p_1[\tau, f(\tau), \beta], \dots, p_m[\tau, f(\tau), \beta]] \\ &\leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\lambda_n^2} \left(1 + \frac{|\lambda|TK_0M_0}{2\lambda_1^2} \right) 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\lambda_n^2} \left(1 + \frac{|\lambda|TK_0M_0}{2\lambda_1^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\|q[\tau, p_1[\tau, f(\tau), \beta], \dots, p_m[\tau, f(\tau), \beta]]\|_H^2 \leq \\ &\leq 4 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right)^2 \left(1 + \frac{|\lambda|TK_0M_0}{2\lambda_1^2} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\|q[\tau, p_1[\tau, f(\tau), \beta], \dots, p_m[\tau, f(\tau), \beta]]\|_H^2 < \infty,$$

из которого следует утверждение леммы.

Лемма 4. Пусть выполнены условия

$$\|q[t, \vartheta_1(t), \dots, \vartheta_m(t)] - q[t, \bar{\vartheta}_1(t), \dots, \bar{\vartheta}_m(t)]\|_H \leq \leq q_0 (\|\vartheta_1(t) - \bar{\vartheta}_1(t)\|_H + \dots + \|\vartheta_m(t) - \bar{\vartheta}_m(t)\|_H), \quad (20)$$

$$\|p_1[t, f(t), \beta] - p_1[t, \bar{f}(t), \beta]\|_H + \dots +$$

$$+ \|p_m[t, f(t), \beta] - p_m[t, \bar{f}(t), \beta]\|_H \leq$$

$$\leq p_{01}(\beta) \|f(t) - \bar{f}(t)\|_H + \dots +$$

$$+ p_{0m}(\beta) \|f(t) - \bar{f}(t)\|_H \leq$$

$$\leq p_0(\beta) \|f(t) - \bar{f}(t)\|_H,$$

$$p_0(\beta) = \max(p_{01}(\beta), \dots, p_{0m}(\beta)). \quad (21)$$

Тогда при выполнении условия

$$\gamma = 2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left(1 + \frac{|\lambda|TK_0M_0}{2\lambda_1^2} \right) q_0 p_0(\beta) < 1, \quad (22)$$

оператор $S[f(t)]$ является сжимающим.

Доказательство. Непосредственным вычислением имеем неравенство:

$$\begin{aligned} & \|S[f(t)] - S[\bar{f}(t)]\|_H^2 = \\ & = \int_0^T (S[f(t)] - S[\bar{f}(t)])^2 dt \leq \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t,1) \times \right. \\ & \times \int_0^T G_n(\tau,1) q[\tau, p_1[\tau, f(\tau), \beta] - p_1[\tau, \bar{f}(\tau), \beta]] + \dots + \\ & \left. [+p_m[\tau, f(\tau), \beta] - p_m[\tau, \bar{f}(\tau), \beta]] d\tau \right)^2 dt \leq \\ & \leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} (G_n^*(t,1))^2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T G_n^2(\tau,1) d\tau dt \times \\ & \times \int_0^T q^2[\tau, p_1[\tau, f(\tau), \beta] - p_1[\tau, \bar{f}(\tau), \beta]] + \dots + \\ & + p_m[\tau, f(\tau), \beta] - p_m[\tau, \bar{f}(\tau), \beta]] d\tau \leq \\ & \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\lambda_n^2} \left(1 + \frac{|\lambda|TM_0K_0}{2\lambda_1^2} \right) 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\lambda_n^2} \left(1 + \frac{|\lambda|TM_0K_0}{2\lambda_1^2} \right) \times \\ & \times \|q[\tau, p_1[\tau, f(\tau), \beta] - p_1[\tau, \bar{f}(\tau), \beta]] + \dots + \\ & + p_m[\tau, f(\tau), \beta] - p_m[\tau, \bar{f}(\tau), \beta]]\|_H^2 \leq \\ & \leq 4 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right)^2 \left(1 + \frac{|\lambda|TK_0M_0}{2\lambda_1^2} \right)^2 \leq \\ & \leq q_0^2 p_0^2(\beta) \|f(t) - \bar{f}(t)\|_H^2, \end{aligned}$$

откуда находим, что

$$\|S[f(t)] - S[\bar{f}(t)]\|_H = 2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left(1 + \frac{|\lambda|TK_0M_0}{2\lambda_1^2} \right) q_0 p_0(\beta) \|f(t) - \bar{f}(t)\|_H.$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия (5)–(6), (8), (20)–(22). Тогда операторное уравнение (18) в пространстве $H(0, T)$ имеет единственное решение.

Доказательство. Согласно Леммам 1–3 операторное уравнение (18) можно рассматривать в пространстве $H(0, T)$. Согласно Лемме 4 оператор $S[f(t)]$ является сжимающим. Поскольку гильбертово пространство $H(0, T)$ является полным метрическим пространством, то согласно теореме [7] о принципе сжимающих отображений оператор $S[f(t)]$ имеет единственную

неподвижную точку, т. е. операторное уравнение (18) имеет единственное решение.

Решение операторного уравнения (18) может быть найдено методом последовательных приближений, т. е. r -е приближение решения находится по формуле

$$f_r(t) = S[\theta_{r-1}(t)], \quad r = 1, 2, 3, \dots,$$

где $f_0(t)$ произвольный элемент пространства $H(0, T)$, причем имеет место оценка

$$\|\bar{f}(t) - f_r(t)\|_H \leq \frac{\gamma^r}{1-\gamma} \|S[f_0(t)]\|_H. \quad (23)$$

Точное решение $f(t)$ может быть найдено как предел приближенных решений, т. е.

$$\bar{f}(t) = \lim_{r \rightarrow \infty} f_r(t)$$

Подставляя это решение в (16), находим искомого оптимальное управление:

$$\mathcal{G}_1^0(t) = p_1[t, \bar{f}(t), \beta],$$

$$\mathcal{G}_m^0(t) = p_m[t, \bar{f}(t), \beta].$$

Оптимальный процесс $v^0(t, x)$, т. е. решение краевой задачи (2)–(4), соответствующее оптимальному управлению $(\mathcal{G}_1^0(t), \dots, \mathcal{G}_m^0(t))$, находим по формуле

$$v^0(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda \int_0^t R_n(t, s, \lambda) b_n^0(s) ds + b_n^0(t) \right) z_n(x), \quad (25)$$

где $b_n^0(t) = e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n +$

$$+ \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} (g_n(\tau) + z_n(1) q[\tau, \mathcal{G}_1^0(\tau), \dots, \mathcal{G}_m^0(\tau)]) d\tau.$$

Минимальное значение функционала (1) вычислим по формуле

$$\begin{aligned} & L[\mathcal{G}_1^0(t), \dots, \mathcal{G}_m^0(t)] = \\ & = \int_0^1 [v^0(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T \sum_{s=1}^m (\mathcal{G}_s^0(t))^2 dt. \quad (26) \end{aligned}$$

Найденная тройка $((\mathcal{G}_1^0(t), \dots, \mathcal{G}_m^0(t)), v^0(t, x), L[\mathcal{G}_1^0(t), \dots, \mathcal{G}_m^0(t)])$ является решением задачи нелинейной оптимизации.

Литература

1. Владимиров В.С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц / В.С. Владимиров // Труды МИАН. 1961. Т. 61. С. 3–158.
2. Тихонов А.Н., Кальнер В.Д., Гласко В.Б. Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении / А.Н. Тихонов, В.Д. Кальнер, В.Б. Гласко. М.: Машиностроение, 1990. 264 с.

3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М.: Наука, 1972. 735 с.
4. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А.И. Егоров. М.: Наука, 1978. 500 с.
5. Керимбеков А., Сейдакмат кызы Э. Условие оптимальности в задаче граничного управления тепловыми процессами, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями / А. Керимбеков, Сейдакмат кызы Э. // Матер. межд. научн.-практич. конф. "Информационные технологии: Инновации в науке и образовании". Бишкек, 2015. С. 178–182.
6. Керимбеков А.К. Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами / А.К. Керимбеков: Дисс... докт. физ.-мат. наук. Бишкек, 2003. 224 с.
7. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. М.: Наука, 1965. 520 с.