УДК 517.97

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ ВОЛЬТЕРРОВО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Сейдакмат кызы Э.

Исследованы вопросы построения приближенного решения задачи нелинейного граничного векторного оптимального управления тепловыми процессами, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями, и доказана их сходимость.

Ключевые слова: краевая задача; квадратичный функционал; векторное управление; система нелинейных интегральных уравнений; приближенное решение; сходимость.

APPROXIMATE SOLUTION OF THE BOUNDARY CONTROL PROBLEM FOR THE THERMAL PROCESSES, DESCRIBED BY VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

Seidakmat kyzy E.

It is investigated the questions of construction of the approximate solutions of the nonlinear boundary vector optimal control problem for the thermal process, described by Volterra integro – differential equations and proved their convergence.

Key words: boundary value problem; quadratic functional; vector control; system of nonlinear integral equations; approximate solution; convergence.

I. Постановка задачи оптимизации и ее полное решение

Рассмотрим задачу нелинейной оптимизации, где требуется минимизировать квадратичный функционал

$$L\left[\vartheta_1(t),\dots,\vartheta_m(t)\right]=$$

$$=\int_0^1\left[\nu(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T\sum_{s=1}^m\vartheta_s^2(t)\,dt,\quad \beta>0,\quad (1)$$

на множестве решений краевой задачи [1]:

$$\nu_t=\nu_{xx}+\lambda\int_0^t K(t,\tau)\nu(\tau,x)\,d\tau+g(t,x),$$

$$0<x<1,\quad 0<t\le T,\qquad (2)$$

$$\nu(0,x)=\psi(x),\quad 0<x<1,\qquad (3)$$

$$\nu_x(t,0)=0,$$

$$\nu_x(t,1)+\alpha\nu(t,1)=q\left[t,\vartheta_1(t),\dots,\vartheta_m(t)\right],\qquad (4)$$

$0<t\le T$.

Здесь функция $\nu(t,x)$, $(t,x)\in Q=\{0<x<1,$ $0<t\le T\}$ – описывает состояния управляемого процесса, ядро $K(t,\tau)$ – известная ограниченная функция, т. е.

$$K_0=\sup_{(t,\tau)\in D}\left|K(t,\tau)\right|,$$

$$D=\left\{0\le t\le T,\quad 0\le\tau\le T\right\},\qquad (5)$$

$\xi(x)\in H(0,1)$, $g(t,x)\in H(Q)$,

$\psi(x)\in H(0,1)$, $q\left[t,\vartheta_1(t),\dots,\vartheta_m(t)\right]\in H(0,T)$ – заданные функции, причем функция $q\left[t,\vartheta_1(t),\dots,\vartheta_m(t)\right]$ нелинейно зависит от вектор-функции управления $\vartheta_1(t),\dots,\vartheta_m(t)\in H^m(0,T)=H(0,T)\times\dots\times H(0,T)$, и по функциональной переменной $\vartheta_1(t),\dots,\vartheta_m(t)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial q\left[t,\vartheta_1(t),\dots,\vartheta_m(t)\right]}{\partial\vartheta_s(t)}\ne0,\quad s=1,\dots,m,\quad \forall t\in[0,T],\ (6)$$

λ – параметр; постоянная $\alpha>0$; T – фиксированный момент времени; $H(Y)$ – гильбертово пространство функций, определенных на множестве Y.

Решение краевой задачи определяется по формуле

$$\nu(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_n(t)z_n(x),$$

где $\nu_n(t)$ – решение линейного интегрального уравнения

$$\nu_n(t)=\lambda\int_0^t K_n(t,s)\nu_n(s)ds+b_n(t), \tag{7}$$

с ядром

$$K_n(t,s)=\int_s^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}K(\tau,s)d\tau \tag{8}$$

и свободным членом

$$b_n(t)=e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}$$

$$\left(g_n(\tau)+z_n(1)q\left[\tau,\vartheta_1(\tau),...,\vartheta_m(\tau)\right]\right)d\tau. \tag{9}$$

Коэффициенты Фурье $\nu_n(t)$ определяются по формуле [2]

$$\nu_n(t)=\lambda\int_0^t R_n(t,s,\lambda)b_n(s)ds+b_n(t), \tag{10}$$

где резольвента $R_n(t,s,\lambda)$ ядра $K_n(t,s)$ имеет вид

$$R_n(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s),$$

$$K_{n,i+1}(t,s)=\int_s^t K_n(t,\eta)K_{n,i}(\eta,s)d\eta,$$

$$i=1,2,3,\dots, \tag{11}$$

и удовлетворяет оценке

$$\left|R_n(t,s,\lambda)\right|\le\frac{K_0}{\lambda_n^2}e^{\frac{|\lambda|K_0(t-s)}{\lambda_n^2}}\le\frac{K_0}{\lambda_1^2}e^{\frac{|\lambda|K_0T}{\lambda_1^2}}. \tag{12}$$

Векторное оптимальное управление $\left(\vartheta_1^0(t),...,\vartheta_m^0(t)\right)$ определяется как решение систем нелинейных интегральных уравнений (см. настоящий сборник)

$$\beta\vartheta_s(t)q_{\vartheta_s}^{-1}\left[t,\vartheta_1(t),...,\vartheta_m(t)\right]+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}G_n^*(t,1)\int_0^T G_n(\tau,1)q\left[\tau,\vartheta_1(\tau),...,\vartheta_m(\tau)\right]d\tau=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}G_n^*(t,1)h_n,$$

$$s=1,...,m, \tag{13}$$

где

$$G_n^*(t,1)=\left(e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_t^T J_n(s,t,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds\right)z_n(1), \tag{14}$$

$$G_n(t,1)=\left(e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_t^T R_n(T,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(s-t)}ds\right)z_n(1), \tag{15}$$

$$h_n=\xi_n-\psi_n\left(e^{-\lambda_n^2T}+\lambda\int_0^T R_n(T,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2 s}ds\right)-$$

$$-\int_0^T G_n(\tau)g_n(\tau)d\tau, \tag{16}$$

удовлетворяют дополнительному условию [3]

$$\left|\Gamma\left[\Pi\left(\cdot;\vartheta_1(t),...,\vartheta_m(t)\right)\right]\right|=$$

$$=(-2\beta)^s\prod_{s=1}^{h}q_{\vartheta_s}\begin{vmatrix}\left(\frac{\vartheta_1}{q_{\vartheta_1}}\right)_{\vartheta_1} & \dots & \left(\frac{\vartheta_1}{q_{\vartheta_1}}\right)_{\vartheta_h}\\ \dots & \dots & \dots\\ \left(\frac{\vartheta_h}{q_{\vartheta_h}}\right)_{\vartheta_1} & \dots & \left(\frac{\vartheta_h}{q_{\vartheta_h}}\right)_{\vartheta_h}\end{vmatrix}>0,$$

$$h=1,...,m. \tag{17}$$

Оптимальное управление имеет структуру [4]

$$\vartheta_1^0(t)=p_1\left[t,\overline{f}(t),\beta\right],$$

$$------------ \tag{18}$$

$$\vartheta_m^0(t)=p_m\left[t,\overline{f}(t),\beta\right],$$

где $\overline{f}(t)$ является единственным решением нелинейного интегрального уравнения

$$f(t)=S\left[f(t)\right]\equiv\sum_{n=1}^{\infty}G_n^*(t,1)$$

$$\left[h_n-\int_0^T G_n(\tau,1)q\left[\tau,p_1\left[\tau,f(\tau),\beta\right]\right.\right.$$

$$\left.\left.,...,p_m\left[\tau,f(\tau),\beta\right]\right]d\tau\right]. \tag{19}$$

Оптимальный процесс $\nu^0(t,x)$ определяется по формуле

$$\nu^0(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^t R_n(t,s,\lambda)b_n^0(s)ds+b_n^0(t)\right)z_n(x), \tag{20}$$

где $b_n^0(t)=e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\left(g_n(\tau)+z_n(1)q\right.$ $\left.\left[\tau,\vartheta_1^0(\tau),...,\vartheta_m^0(\tau)\right]\right)d\tau,$

а минимальное значение функционала (1) вычисляется по формуле

$$L\left[\vartheta_1^0(t),...,\vartheta_m^0(t)\right]=\int_0^1\left[\nu^0(T,x)-\right.$$

$$\left.\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T\sum_{s=1}^{m}\left(\vartheta_s^0(t)\right)^2dt. \tag{21}$$

Найденная тройка $\left(\left(\vartheta_1^0(t),...,\vartheta_m^0(t)\right),\ \nu^0(t,x),\right.$ $\left.L\left[\vartheta_1^0(t),...,\vartheta_m^0(t)\right]\right)$ определяет решение задачи нелинейной оптимизации.

II. Приближенное решение задачи оптимизации

На практике не всегда удается найти точное решение уравнения (19). Поэтому в большинстве случаев ограничиваются нахождением приближенного решения $\theta_k(t)$ уравнения (18), где число k определяется из неравенства [5]

$$\left\|\overline{f}(t)-f_j(t)\right\|_H \le \frac{\gamma^j}{1-\gamma}\left\|S\left[f_0(t)\right]\right\|_H < \varepsilon, \qquad (22)$$

при заданном $\varepsilon > 0$. j-е приближение находим по формуле

$$\begin{aligned} &\vartheta_1^{(j)}(t) = p_1\left[t, f_j(t), \beta\right], \\ &------------ \qquad (23)\\ &\vartheta_m^{(j)}(t) = p_m\left[t, f_j(t), \beta\right]. \end{aligned}$$

Лемма 1. j-е приближение оптимального управления удовлетворяет оценке

$$\left\|\vartheta_1^0(t)-\vartheta_1^{(j)}(t)\right\|_H,...,\left\|\vartheta_m^0(t)-\vartheta_m^{(j)}(t)\right\|_H \le$$

$$\le p_0(\beta)\frac{\gamma^j}{1-\gamma}\left\|S\left[f_0(t)\right]\right\|_H,$$

$$p_0(\beta) = \max\left(p_{01}(\beta),...,p_{0m}(\beta)\right), \qquad (24)$$

и сходится к оптимальному управлению $\left(\vartheta_1^0(t),...,\vartheta_m^0(t)\right)$ по норме пространства $H(0,T)$.

Доказательство. Непосредственным вычислением имеем неравенство

$$\left\|\vartheta_1^0(t)-\vartheta_1^{(j)}(t)\right\|_H,...,\left\|\vartheta_m^0(t)-\vartheta_m^{(j)}(t)\right\|_H \le$$

$$\le p_{01}(\beta)\left\|\overline{f}(t)-f_j(t)\right\|_H,...., p_{0m}(\beta)$$

$$\left\|\overline{f}(t)-f_j(t)\right\|_H \le p_0(\beta)\left\|\overline{f}(t)-f_j(t)\right\|_H \le$$

$$\le p_0(\beta)\frac{\gamma^j}{1-\gamma}\left\|S\left[f_0(t)\right]\right\|_H,$$

из которого следует утверждение леммы.

Подставляя приближенное управление $\left(\vartheta_1^{(j)}(t),...,\vartheta_m^{(j)}(t)\right)$ в (20), находим j-е приближение $v_j(t,x)$ оптимального процесса $v^0(t,x)$, т. е.

$$v_j(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^t R_n(t,s,\lambda)b_n^{(j)}(s)ds + b_n^{(j)}(t)\right)z_n(x), \qquad (25)$$

где $b_n^{(j)}(t) = e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\Big(g_n(\tau) +$ $z_n(1)q\left[\tau, \vartheta_1^{(j)}(\tau),...,\vartheta_m^{(j)}(\tau)\right]\Big)d\tau.$

Лемма 2. j-е приближение оптимального процесса удовлетворяет оценке

$$\left\|v^0(t,x)-v_j(t,x)\right\|_H \le$$

$$\le \sqrt{2T\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\left(1+\frac{|\lambda|TK_0M_0}{2\lambda_1^2}\right)q_0}$$

$$p_0(\beta)\left\|\overline{f}(t)-f_j(t)\right\|_H$$

и сходится к оптимальному процессу $v^0(t,x)$ по норме пространства $H(Q)$.

Доказательство. Согласно (24) и (25), непосредственным вычислением имеем неравенство:

$$\left\|v^0(t,x)-v_j(t,x)\right\|_H^2 = \int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_0^t z_n(1)q\left[\tau,\vartheta_1^0(\tau),...,\vartheta_m^0(\tau)\right]\right.$$

$$\left(e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}+\lambda\int_\tau^t R_n(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds\right)d\tau -$$

$$-\int_0^t z_n(1)q\left[\tau,\vartheta_1^j(\tau),...,\vartheta_m^j(\tau)\right]$$

$$\left.\left(e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}+\lambda\int_\tau^t R_n(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds\right)d\tau\right\}^2 dt \le$$

$$\le 2T\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\left(1+\frac{|\lambda|TK_0M_0}{2\lambda_1^2}\right)q_0^2p_0^2(\beta)\left\|\overline{f}(t)-f_j(t)\right\|_H^2,$$

из которого следует утверждение леммы.

При исследовании сходимости оптимального процесса необходимо учитывать сходимость по резольвенте, так как приближения оптимального процесса имеют вид

$$v_j^k(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^t R_n^k(t,s,\lambda)b_n^{(j)}(s)ds + b_n^{(j)}(t)\right)z_n(x) \qquad (26)$$

и определяются двумя индексами $j,\ k = 1,2,3,...$. Поскольку

$R_n(t,s,\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s)$ и $R_n^k(t,s,\lambda) = \sum_{i=1}^{k}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s)$,

то сходимость k-го приближения резольвенты $R_n(t,s,\lambda)$ при каждом фиксированном $n = 1,2,3,...$ следует из неравенства

$$R_n(t,s,\lambda)-R_n^k(t,s,\lambda) = \sum_{i=k+1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s) \le$$

$$\le \frac{K_0}{\lambda_n^2}\cdot\frac{1}{k!}\left(\frac{|\lambda|K_0T}{\lambda_n^2}\right)^k e^{\frac{|\lambda|K_0T}{\lambda_n^2}} \le \frac{K_0}{\lambda_n^2}\cdot\frac{1}{k!}\left(\frac{|\lambda|K_0T}{\lambda_n^2}\right)^k e^{\frac{|\lambda|K_0T}{\lambda_1^2}},$$

которое получено с учетом формулы остаточного члена равномерно сходящегося ряда

$$R_n(t,s,\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s) \le$$

$$\le \frac{K_0}{\lambda_n^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(i-1)!}\left[\frac{|\lambda|K_0(t-s)}{\lambda_n^2}\right]^{i-1} =$$

$$= \frac{K_0}{\lambda_n^2}e^{\frac{|\lambda|K_0(t-s)}{\lambda_n^2}} \le \frac{K_0}{\lambda_1^2}e^{\frac{|\lambda|K_0T}{\lambda_1^2}}.$$

Лемма 3. $j,\ k$-е приближение оптимального процесса удовлетворяет оценке

$$\left\|v_j(t,x)-v_j^k(t,x)\right\|_H \le \lambda T\left(\frac{K_0}{k!}\left(\frac{|\lambda|K_0T}{\lambda_1^2}\right)^k e^{\frac{|\lambda|K_0T}{\lambda_1^2}}\right)\times$$

$$\times\sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\left\{\left\|\psi\left(x\right)\right\|_H^2+\left(T\left\|g\left(\tau,x\right)\right\|_H^2+\right.\right.}$$
$$\overline{\left.\left.+2T\left\|q\left[\tau,\vartheta_1^{(j)}\left(\tau\right),...,\vartheta_m^{(j)}\left(\tau\right)\right]\right\|_H^2\right)\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\right\}}$$

и сходится к функции $v_j\left(t,x\right)$ по норме пространства $H\left(Q\right)$.

Доказательство. Согласно (27) и приближению по резольвенте, непосредственным вычислением имеем неравенство

$$\left\|v_j(t,x)-v_j^k(t,x)\right\|_H^2=$$
$$\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\lambda\int_0^t R_n(t,s,\lambda)\left[e^{-\lambda_n^2 s}\psi_n+\int_0^s e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}g_n\left(\tau\right)d\tau+\right.\right.$$
$$\left.+\int_0^s e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}z_n\left(1\right)q\left[\tau,\vartheta_1^{(j)}\left(\tau\right),...,\vartheta_m^{(j)}\left(\tau\right)\right]d\tau\right]ds-$$
$$-\lambda\int_0^t R_n^k(t,s,\lambda)\left[e^{-\lambda_n^2 s}\psi_n+\int_0^s e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}g_n\left(\tau\right)d\tau+\int_0^s e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}z_n\left(1\right)q\right.$$
$$\left.\left.\left[\tau,\vartheta_1^{(j)}\left(\tau\right),...,\vartheta_m^{(j)}\left(\tau\right)\right]d\tau\right]ds\right\}^2dt\le$$
$$\le\frac{3}{2}\lambda^2T^2\left(\frac{K_0}{k!}\left(\frac{\left|\lambda\right|K_0T}{\lambda_1^2}\right)^k e^{\frac{\left|\lambda\right|K_0T}{\lambda_1^2}}\right)^2\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\times$$
$$\times\left\{\left\|\psi\left(x\right)\right\|_H^2+\left(T\left\|g\left(\tau,x\right)\right\|_H^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.2T\left\|q\left[\tau,\vartheta_1^{(j)}\left(\tau\right),...,\vartheta_m^{(j)}\left(\tau\right)\right]\right\|_H^2\right)\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\right\},$$

из которого следует утверждение леммы.

Поскольку $v_j^k\left(t,x\right)$ определяется как сумма бесконечного функционального ряда, то не всегда удается найти ее. Поэтому на практике целесообразно использовать приближение вида

$$v_j^{k,l}\left(t,x\right)=\sum_{n=1}^{l}\left(\lambda\int_0^t R_n^k\left(t,s,\lambda\right)b_n^{(j)}\left(s\right)ds+b_n^{(j)}\left(t\right)\right)z_n\left(x\right),\quad(27)$$

которое назовем $j,\ k,\ l$-приближением оптимального процесса.

Лемма 4. $j,\ k,\ l$-е приближение оптимального процесса при $l\to\infty$ сходится к функции $v_j^k\left(t,x\right)$ по норме пространства $H\left(Q\right)$.

Доказательство. Непосредственным вычислением имеем соотношение

$$\left\|v_j^k\left(t,x\right)-v_j^{k,l}\left(t,x\right)\right\|_H^2=$$
$$=\int_0^T\sum_{n=l+1}^{\infty}\left\{\psi_n\left(e^{-\lambda_n^2 t}+\lambda\int_0^t R_n^m\left(t,s,\lambda\right)e^{-\lambda_n^2 s}ds\right)+\right.$$
$$+\int_0^t g_n\left(\tau\right)\left(e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}+\lambda\int_\tau^t R_n^m\left(t,s,\lambda\right)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds\right)d\tau+$$
$$+\int_0^t z_n\left(1\right)q\left[\tau,\vartheta_1^{(j)}\left(\tau\right),...,\vartheta_m^{(j)}\left(\tau\right)\right]$$
$$\left.\left(e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}+\lambda\int_\tau^t R_n^m\left(t,s,\lambda\right)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds\right)d\tau\right\}^2dt\le$$
$$\le3\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\left(1+\frac{\left|\lambda\right|TK_0M_0}{2\lambda_1^2}\right)$$
$$\left[\left\|\psi\left(x\right)\right\|_{H(0,1)}^2+T\left\|g\left(\tau,x\right)\right\|_{H(Q)}^2+2T\right.$$
$$\left.\left\|q\left[\tau,\vartheta_1^{(j)}\left(\tau\right),...,\vartheta_m^{(j)}\left(\tau\right)\right]\right\|_{H(0,T)}^2\right],$$

которое справедливо при каждом фиксированном $l=1,2,3,...$, так как остаточный член сходящегося ряда стремится к нулю при $l\to\infty$.

Лемма 5. $j,\ k,\ l$-е приближение оптимального процесса при $j,\ k,\ l\to\infty$ сходится к функции $v^0\left(t,x\right)$ по норме пространства $H\left(Q\right)$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из соотношения

$$\left\|v^0\left(t,x\right)-v_j^{k,l}\left(t,x\right)\right\|_H^2\le$$
$$\le\left\|v^0\left(t,x\right)-v_j\left(t,x\right)+v_j\left(t,x\right)-\right.$$
$$\left.-v_j^l\left(t,x\right)+v_j^l\left(t,x\right)-v_j^{k,l}\left(t,x\right)\right\|_H^2\le$$
$$\le\left\|v^0\left(t,x\right)-v_j\left(t,x\right)\right\|_H^2+$$
$$+\left\|v_j\left(t,x\right)-v_j^l\left(t,x\right)\right\|_H^2+$$
$$+\left\|v_j^l\left(t,x\right)-v_j^{k,l}\left(t,x\right)\right\|_H^2\xrightarrow[k,m,r\to\infty]{}0.$$

Поскольку оптимальный процесс имеет приближения $v_j\left(t,x\right)$, $v_j^k\left(t,x\right)$ и $v_j^{k,l}\left(t,x\right)$, то будем различать три вида приближения минимального значения функционала (1) в следующем виде:

$$L\left[\vartheta_1^{(j)}\left(t\right),...,\vartheta_m^{(j)}\left(t\right)\right]=$$
$$=\int_0^1\left[v_j\left(T,x\right)-\xi\left(x\right)\right]^2dx+\beta\int_0^T\sum_{s=1}^m\left(\vartheta_s^{(j)}\left(t\right)\right)^2dt,$$
$$L_k\left[\vartheta_1^{(j)}\left(t\right),...,\vartheta_m^{(j)}\left(t\right)\right]=$$
$$=\int_0^1\left[v_j^k\left(T,x\right)-\xi\left(x\right)\right]^2dx+\beta\int_0^T\sum_{s=1}^m\left(\vartheta_s^{(j)}\left(t\right)\right)^2dt,$$
$$L_k^l\left[\vartheta_1^{(j)}\left(t\right),...,\vartheta_m^{(j)}\left(t\right)\right]=$$
$$=\int_0^1\left[v_j^{k,l}\left(T,x\right)-\xi\left(x\right)\right]^2dx+\beta\int_0^T\sum_{s=1}^m\left(\vartheta_s^{(j)}\left(t\right)\right)^2dt.$$

Лемма 6. j-е приближенное значение функционала удовлетворяет оценке

$$\left| L\left[\vartheta_1^0(t),...,\vartheta_m^0(t)\right] - L\left[\vartheta_1^{(j)}(t),...,\vartheta_m^{(j)}(t)\right]\right| \le$$

$$\le C_1\left\|\nu^0(T,x)-\nu_j(T,x)\right\|_H + C_2\sum_{s=1}^{m}\left\|\vartheta_s^0(t)-\vartheta_s^{(j)}(t)\right\|_H,$$

где C_1, C_2 – положительные постоянные, и сходятся к точному значению функционала $L\left[\vartheta_1^0(t),...,\vartheta_m^0(t)\right]$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из соотношения

$$\left| L\left[\vartheta_1^0(t),...,\vartheta_m^0(t)\right] - L\left[\vartheta_1^{(j)}(t),...,\vartheta_m^{(j)}(t)\right]\right| \le$$

$$\le \left|\int_0^1\left\{\left[\nu^0(T,x)-\xi(x)\right]^2-\left[\nu_j(T,x)-\xi(x)\right]^2\right\}dx + \right.$$

$$\left. +\beta\int_0^T\left[\sum_{s=1}^{m}\left(\vartheta_s^0(t)\right)^2-\sum_{s=1}^{m}\left(\vartheta_s^{(j)}(t)\right)^2\right]dt\right| \le$$

$$\le C_1\left\|\nu^0(T,x)-\nu_j(T,x)\right\|_H + C_2\sum_{s=1}^{m}\left\|\vartheta_s^0(t)-\vartheta_s^{(j)}(t)\right\|_H,$$

которое справедливо, согласно леммам *1–2*.

Лемма 7. j, k-е приближенное значение функционала удовлетворяет оценке

$$\left| L\left[\vartheta_1^{(j)}(t),...,\vartheta_m^{(j)}(t)\right] - L_k\left[\vartheta_1^{(j)}(t),...,\vartheta_m^{(j)}(t)\right]\right| \le$$

$$\le C_3\left\|\nu_j(T,x)-\nu_j^k(T,x)\right\|_H,$$

где C_3 – положительное постоянное, и сходится к значению функционала $L\left[\vartheta_1^{(j)}(t),...,\vartheta_m^{(j)}(t)\right]$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из соотношения

$$\left| L\left[\vartheta_1^{(j)}(t),...,\vartheta_m^{(j)}(t)\right] - L_k\left[\vartheta_1^{(j)}(t),...,\vartheta_m^{(j)}(t)\right]\right| \le$$

$$\le \left|\int_0^1\left\{\left(\nu_j(T,x)+\nu_j^k(T,x)-2\xi(x)\right)\left(\nu_j(T,x)-\nu_j^k(T,x)\right)\right\}dx\right| \le$$

$$\le \left\|\nu_j(T,x)+\nu_j^k(T,x)-2\xi(x)\right\|_H$$

$$\left\|\nu_j(T,x)-\nu_j^k(T,x)\right\|_H \le C_3\left\|\nu_j(T,x)-\nu_j(T,x)\right\|_H,$$

которое справедливо, согласно лемме *3*.

Лемма 8. j, k, l-е приближенное значение функционала удовлетворяет оценке

$$\left| L_k\left[\vartheta_1^{(j)}(t),...,\vartheta_m^{(j)}(t)\right] - L_k^l\left[\vartheta_1^{(j)}(t),...,\vartheta_m^{(j)}(t)\right]\right| \le$$

$$\le C_4\left\|\nu_j^k(T,x)-\nu_j^{k,l}(T,x)\right\|_H$$

$$\left| L_k\left[\vartheta_1^{(j)}(t),...,\vartheta_m^{(j)}(t)\right] - L_k^l\left[\vartheta_1^{(j)}(t),...,\vartheta_m^{(j)}(t)\right]\right| \le$$

$$\le C_4\left\|\nu_j^k(T,x)-\nu_j^{k,l}(T,x)\right\|_H,$$

где C_4 – положительное постоянное, и сходится к значению функционала $L_k\left[\vartheta_1^{(j)}(t),...,\vartheta_m^{(j)}(t)\right]$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из соотношения

$$\left| L_k\left[\vartheta_1^{(j)}(t),...,\vartheta_m^{(j)}(t)\right] - L_k^l\left[\vartheta_1^{(j)}(t),...,\vartheta_m^{(j)}(t)\right]\right| \le$$

$$\le \left|\int_0^1\left\{\left(\nu_j^k(T,x)+\nu_j^{k,l}(T,x)-2\xi(x)\right)\left(\nu_j^k(T,x)-\nu_j^{k,l}(T,x)\right)\right\}dx\right| \le$$

$$\le \left\|\nu_j^k(T,x)+\nu_j^{k,l}(T,x)-2\xi(x)\right\|_H\left\|\nu_j^k(T,x)-\nu_j^{k,l}(T,x)\right\|_H \le$$

$$\le C_4\left\|\nu_j^k(T,x)-\nu_j^{k,l}(T,x)\right\|_H,$$

которое справедливо, согласно лемме *4*.

Лемма 9. j, k, l-е приближенное значение функционала при j, k, $l \to \infty$ сходится к точному значению функционала $L\left[\vartheta_1^0(t),...,\vartheta_m^0(t)\right]$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из соотношения

$$\left| L\left[\vartheta_1^0(t),...,\vartheta_m^0(t)\right] - L_k^l\left[\vartheta_1^{(j)}(t),...,\vartheta_m^{(j)}(t)\right][u_k]\right| \le$$

$$\le \left| L\left[\vartheta_1^0(t),...,\vartheta_m^0(t)\right] - L\left[\vartheta_1^{(j)}(t),...,\vartheta_m^{(j)}(t)\right]\right| +$$

$$+\left| L\left[\vartheta_1^{(j)}(t),...,\vartheta_m^{(j)}(t)\right] - L_k\left[\vartheta_1^{(j)}(t),...,\vartheta_m^{(j)}(t)\right]\right| +$$

$$+\left| L_k\left[\vartheta_1^{(j)}(t),...,\vartheta_m^{(j)}(t)\right] - L_k^l\left[\vartheta_1^{(j)}(t),...,\vartheta_m^{(j)}(t)\right]\right| \xrightarrow[j,k,l\to\infty]{} 0,$$

которое справедливо, согласно леммам *6–8*.

Литература

1. *Владимиров В.С.* Математические задачи односкоростной теории переноса частиц / В.С. Владимиров // Труды МИАН. 1961. Т.61. С. 3–158.
2. *Краснов М.В.* Интегральные уравнения / М.В. Краснов. М.: Наука, 1975. 303 с.
3. *Керимбеков А., Сейдакмат кызы Э.* Условие оптимальности в задаче граничного управления тепловыми процессами, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями / А. Керимбеков, Сейдакмат кызы Э. // Матер. межд. научн.-практич. конф. “Информационные технологии: Инновации в науке и образовании”. Бишкек, 2015. С. 178–182.
4. *Керимбеков А.К.* Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами: дис. … д-ра физ.-мат наук / А.К. Керимбеков. Бишкек, 2003. 224 с.
5. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. М.: Наука, 1965. 520 с.