

УДК 622.276:517.977.1/5

**СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕЖИМОВ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ ИНДУКЦИОННОГО НАГРЕВА ОБСАДНОЙ КОЛОННЫ НЕФТЯНОЙ СКВАЖИНЫ**

*Л.Г. Лелевкина, И.В. Гончарова, Е.А. Комарцова*

Исследованы закономерности влияния штрафных параметров  $\beta, \gamma$  на величину функционала энергии. Проведен сравнительный анализ горячего и промежуточного режимов нагрева. Даны рекомендации по выбору штрафных параметров в каждом режиме.

*Ключевые слова:* высокопарафинистые нефти; нефтеотдача пластов; индукционный нагрев; обсадная колонна; нефтяная скважина.

**COMPARATIVE ANALYSIS OF OPTIMAL CONTROL PROCESS CONDITIONS OF THE OIL WELL CASING PIPE INDUCTIVE HEATING**

*L.G. Lelevkina, I.V. Goncharova, E.A. Komartsova*

The regularities of the penalty parameters influence on the energy functional are researched. A comparative analysis of the hot and intermediate heating modes is held. Recommendations on the choice of penalty parameters in each mode are given.

*Key words:* highly paraffinic oil; oil recovery; induction heating; casing; oil well

**Введение.** По материалам геолого-геофизических исследований общие прогнозные ресурсы нефтегазоперспективных структур Кыргызстана оцениваются в 765–1360 млн т. Как сообщается в материалах, подготовленных Министерством энергетики и промышленности к форуму “Кыргызстан – Татарстан”, состоявшемуся 3 марта 2015 г., ежегодно в Кыргызстане добывают от 70 до 90 тыс. т нефти (рисунок 1).

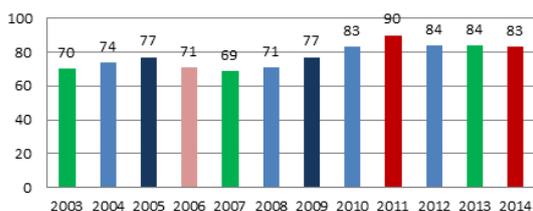


Рисунок 1 – Объемы добычи сырой нефти (тыс. т)

При разработке залежей высоковязких, высокопарафинистых нефтей, которыми являются большинство нефтей Кыргызстана, возникают проблемы, связанные с малой подвижностью флюидов, низкой проницаемостью пластов и невысокими забойными давлениями.

В настоящее время активно разрабатываются теоретические основы и практические методы

реализаций новейших технологий повышения нефтеотдачи пластов, в том числе применяются методы термического воздействия на пласт. В качестве источника тепла предлагается использовать, например, индуктор, разработанный сотрудниками кафедры прикладной физики Башкирского Государственного университета [1].

В данной работе проводится математическое моделирование процесса индукционного нагрева обсадной колонны нефтяной скважины и рассматривается процесс его оптимизации, в котором критерием качества является функционал энергии. Задача его минимизации решается методами оптимизации систем с распределенными параметрами [2].

**1. Постановка задачи.** Управляемый процесс индукционного нагрева в промежуточном режиме с распределенными источниками энергии в области  $Q = \{0 < t \leq t_p, 0 < r < R\}$  описывается уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{a}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{a}{\lambda} V(t, r) \tag{1.1}$$

с начальным условием и граничными условиями

$$T(0, r) = \varphi_1(r) \quad \frac{\partial T(t, 0)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T(t, r)}{\partial r} \Big|_{r=R} = h [T_R - T(t, R)], \tag{1.2}$$

где  $\frac{a}{\lambda}V(t, r) = w(r)u(t)$  и  $w(r)$  – заданная функция, которая на каждом этапе нагрева задается различными аналитическими выражениями [3].

Требуется среди всех допустимых управлений  $0 \leq u(t) \leq u_{max}$  найти такое управление  $u_0(t)$ , которое вместе с соответствующим ему решением  $T^0(t, r)$  краевой задачи (1.1)–(1.2) минимизирует функционал энергии  $J[u] = 2\pi l \int_0^R \int_0^{t_1} V(t, r) r dt dr$  и при  $t = t_1$  выполняется  $T(t_1, r) = \varphi_2(r)$ . Задача минимизации функционала энергии заменяется задачей минимизации функционала вида [3]:

$$F[u, \beta, \gamma, c] = \beta \left\{ \gamma \int_0^{t_1} u(t) dt + \int_0^{t_1} [u(t) - c]^2 dt \right\} + \int_0^R r [T(t_1, r) - \varphi_2(r)]^2 dr \quad (1.3)$$

В результате замены  $v(t) = u(t) - c + \frac{\gamma}{2}$  и преобразования функционала (1.3) получится квадратичный функционал

$$F[v, \beta, \gamma, c] = \beta \int_0^{t_1} v^2(t) dt + \int_0^R r [T(t_1, r) - \varphi_2(r)]^2 dr - \frac{\gamma \beta t_1 (\gamma - 4c)}{4}. \quad (1.4)$$

### 2. Решения основной и сопряженной задач.

При решении задачи (1.1)–(1.3) применяется метод максимума Понтрягина для систем с распределенными параметрами [2] в задаче оптимизации индукционного нагрева [3] и интегро-интерполяционный метод [4].

Рассматривается следующая итерационная задача:

$$\frac{\partial T^{(k)}(t, r)}{\partial t} = \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T^{(k)}}{\partial r} \right) + u^{(k-1)}(t) w(r), \quad (2.1)$$

$$T^{(k)}(0, r) = \varphi_1(r), \quad \left. \frac{\partial T^{(k)}(t, r)}{\partial r} \right|_{r=R} = h_z [T_R - T^{(k)}(t, R)] \quad (2.2)$$

Проводятся преобразования [5] с использованием квадратурной формулы

$$\frac{1}{\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} T^{(k)}(t, r) dt \approx \theta T^{(k)}(t_n, r) + (1 - \theta) T^{(k)}(t_{n-1}, r),$$

приводящие к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{a}{r} (r U'(r))' - b U(r) = f(r); \quad (2.3)$$

$$U'(0) = 0; \quad U'(R) = h_z [T_R - U(R)], \quad (2.4)$$

где введены следующие обозначения:

$$U(r) \equiv \theta T^n(r) + (1 - \theta) T^{n-1}(r), \quad T^n(r) \equiv T^{(k)}(t_n, r),$$

$$b = \frac{1}{\theta \tau}; \quad f(r) = -\frac{T^{n-1}(r)}{\theta \tau} - w(r) u_{n-1}.$$

Путем построения разностной схемы Кранка–Николсона для задачи (2.1)–(2.2), получим систему дискретных уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} a \frac{U_2^h - U_1^h}{h} = \frac{h}{4} (f_1 + b U_1^h); \\ a \frac{r_{i+1}^h}{r_i} S \left( \frac{r_i}{r_{i+1}} \right) \frac{U_{i+1}^h - U_i^h}{h} - a S \left( \frac{r_{i-1}}{r_i} \right) \frac{U_i^h - U_{i-1}^h}{h} = \\ = \frac{1}{2} (f_i + b U_i) \left[ \frac{r_{i+1}}{r_i} S \left( \frac{r_i}{r_{i+1}} \right) r_{i+1/2} - S \left( \frac{r_{i-1}}{r_i} \right) r_{i-1/2} \right]; \\ i = \overline{1, N-1} \\ -a S \left( \frac{r_{N-1}}{r_N} \right) \frac{U_N^h - U_{N-1}^h}{h} + a h_z T_R - a h_z U_N^h = \\ = \frac{1}{2} (f_N + b U_N) \left[ -S \left( \frac{r_{N-1}}{r_N} \right) r_{N-1/2} + r_N \right]. \end{cases} \quad (2.5)$$

Таким образом, (2.1)–(2.2) аппроксимируется задачей (2.5), решение которой находится с помощью метода прогонки, после чего, решение исходной основной задачи (2.1)–(2.3) определяется по формуле:

$$T_i^n = \frac{1}{\theta} U_i^h - \left( \frac{1}{\theta} - 1 \right) T_i^{n-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.6)$$

Решается сопряженная задача:

$$\frac{\partial \psi^{(k)}(t, r)}{\partial t} + a \frac{\partial^2 \psi^{(k)}(t, r)}{\partial r^2} + \frac{a}{r} \frac{\partial \psi^{(k)}(t, r)}{\partial r} = 0,$$

$$\psi^{(k)}(t_1, r) = -2[T^{(k)}(t_1, r) - \varphi_2(r)],$$

$$\left[ \frac{\partial \psi^{(k)}(t, r)}{\partial r} + h_z \psi^{(k)}(t, r) \right]_{r=R} = 0.$$

Эта задача решается тем же методом, что и основная задача [5]. С учетом обозначения  $\Phi(r) \equiv (1 - \theta) \psi^n(r) + \theta \psi^{n-1}(r)$  получается следующая краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{a}{r} (r \Phi'(r))' - b \Phi(r) = f(r); \quad (2.7)$$

$$\Phi'(0) = 0; \quad \Phi'(R) = -h_z \Phi(R). \quad (2.8)$$

К этой задаче применяется схема (2.5), где  $T_R = 0$ , находится значение  $\Phi_i^h$ , тогда итерационные значения для решения сопряженной задачи (2.6) находятся по формуле:

Таблица 1 – Результаты численных исследований влияния штрафных параметров  $\beta, \gamma$  в промежуточном режиме

$\beta\gamma$	1E-08	1E-07	1E-06	1E-05	1E-04	1E-03	1E-02	1E-01
5E+06	4443,57	4443,57	4443,59	4443,80	4445,87	4466,59	4676,42	7035,21
7E+06	347,20	347,20	347,20	347,22	347,43	349,51	370,63	608,35
9E+06	54,15	54,15	54,16	54,16	54,21	54,70	59,62	108,76
1E+07	25,74	25,74	25,74	25,74	25,77	26,10	29,37	57,98
3E+07	2,09	2,09	2,09	2,09	2,14	2,63	7,23	22,11
5E+07	2,09	2,09	2,09	2,10	2,18	3,00	10,55	29,17
9E+07	2,10	2,10	2,10	2,12	2,26	3,72	17,17	42,03
1E+08	2,10	2,10	2,10	2,12	2,28	3,90	18,82	45,14
3E+08	2,11	2,11	2,11	2,16	2,65	7,48	51,84	105,88
5E+08	2,11	2,11	2,12	2,20	3,01	11,05	84,84	166,04
1E+09	2,11	2,11	2,13	2,29	3,91	19,97	167,34	316,16

Таблица 2 – Выборочные результаты исследований влияния параметров  $\beta, \gamma \in$  в горячем режиме

$\beta\gamma$	1,E-08	1,E-07	1,E-06	1,E-05	1,E-04	1,E-03	1,E-02	1,E-01
5,E+05	38,82	38,82	38,82	38,82	38,80	38,61	36,81	24,09
6,E+05	15,84	15,84	15,84	15,84	15,84	15,86	15,98	18,45
7,E+05	13,04	13,04	13,04	13,04	13,05	13,10	13,68	19,42
8,E+05	13,14	13,14	13,14	13,14	13,15	13,22	13,96	20,73
1,E+06	14,28	14,28	14,28	14,28	14,29	14,38	15,25	22,92
3,E+06	19,62	19,62	19,62	19,86	19,8	19,85	21,37	32,20
7,E+06	21,97	21,97	21,97	22,07	22,16	22,27	24,83	37,70
1,E+07	22,58	22,58	22,58	22,68	23,06	23,96	26,21	40,01
3,E+07	23,60	23,60	23,60	23,71	24,69	25,52	32,24	50,61
1,E+08	23,97	23,97	23,98	24,09	25,26	29,77	49,96	82,71

$$\psi_i^{n-1} = \frac{1}{\theta} \Phi_i^h - \left( \frac{1}{\theta} - 1 \right) \psi_i^n, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.9)$$

После нахождения приближенного решения сопряженной задачи и использования квадратурной формулы находится оптимальное управляющее воздействие на каждом итерационном шаге по формуле

$$u^{(k)}(t_n) = \frac{1}{2\beta} \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{l-1} \{ r_i \psi_i^n w(r_i) + r_{i+1} \psi_{i+1}^n w(r_{i+1}) \} + c - \frac{\gamma}{2},$$

после чего делается переход к следующей итерации, этот процесс продолжается до тех пор, пока количество итераций не превысит определенного числа, либо когда изменение значения управления будет незначительным.

**3. Анализ численных экспериментов в промежуточном и горячем режимах нагрева.** Численная реализация проводится в среде Borland Delphi 7. При численных расчетах использована работа [1].

Функция распределения внутренних источников тепла в промежуточном режиме нагрева имеет вид

$$w(t, r) = \begin{cases} \frac{3824R}{(4R - \Delta_2)\Delta_2}, & \text{при } R - \frac{\Delta_2}{2} \leq r \leq R \\ 0, & \text{при } 0 \leq r \leq R - \frac{\Delta_2}{2}, \end{cases} \quad (3.1)$$

где  $R$  – радиус цилиндра;  $\Delta_2$  – глубина проникновения в металл электромагнитной волны на втором этапе нагрева.

После потери магнитных свойств слоев стали, лежащем на расстоянии  $\Delta_2$  от поверхности цилиндра, начинается горячий режим, в течение которого удельная мощность и электрические параметры индуктора остаются постоянными.

Функция распределения внутренних источников тепла в горячем режиме нагрева имеет вид

$$w(r) = \frac{\sqrt{2}K(ber'^2 Z + bei'^2 Z)}{ber'ZberZ + bei'ZbeiZ}, \quad (3.2)$$

где  $K = \frac{1}{\Delta_K}$ ,  $z = \sqrt{2}rK$ ;  $berZ$ ,  $beiZ$ ,  $ber'Z$ ,  $bei'Z$  – функции Кельвина и их производные.

При исследованиях в промежуточном и горячем режимах нагрева были получены благоприятные зоны по параметру  $c$ , соответственно, равные  $[0,02; 0,04]$  и  $[0,02; 0,1]$ .

Выборочные результаты численных исследований влияния штрафных параметров  $\gamma, \beta$  на величину минимизируемого функционала в промежуточном режиме при  $A=0,03$  и времени нагрева  $t=60$  представлены в таблице 1 и на рисунке 2.

В результате расчетов в промежуточном режиме получена область относительно постоянных минимальных значений функционала – зона благоприятных значений функционала при  $\beta \in [1E+7; 1E+8]$ ,  $\gamma \in [1E-4; 1E-8]$ . Минимальные значения функционала наблюдаются при  $\beta \in [3E+7; 5E+7]$ ,  $\gamma \in [1E-5; 1E-8]$ . Как видно на рисунке 2, в промежуточном режиме возникают две зоны флуктуации: первая зона при  $\gamma \geq 1E-2$ ,  $\beta \geq 3E+8$ , вторая – при  $\beta \leq 1E+7$ ,  $\gamma \in [1E-8; 1E-1]$ .

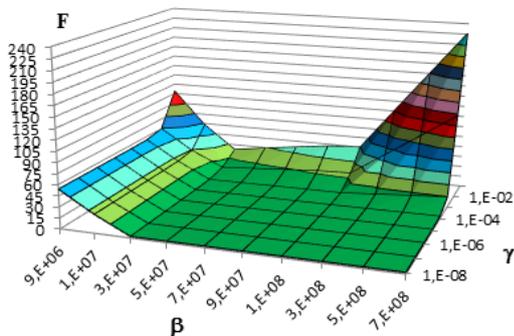


Рисунок 2 – Поверхностная диаграмма зависимости  $F(\beta; \gamma)$  в промежуточном режиме при  $t=60$ ,  $c=0,03$ ,  $\beta \in [5E+6; 1E+9]$ ,  $\gamma \in [1E-8; 1E-1]$

Выборочные результаты исследований влияния параметров  $\beta, \gamma$  в горячем режиме при  $t=90$ ,  $c=0,03$  приведены в таблице 2 и на поверхностной диаграмме (рисунок 3).

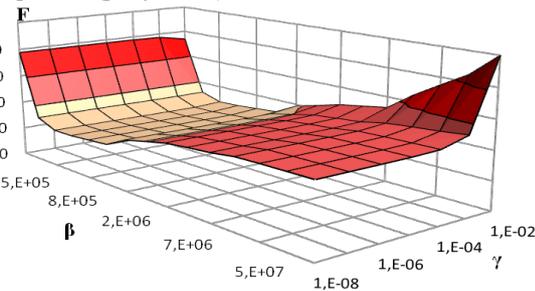


Рисунок 3 – Поверхностная диаграмма зависимости  $F(\beta; \gamma)$  в горячем режиме при  $t=90$ ,  $c=0,03$ ,  $\beta \in [5E+5; 1E+8]$ ,  $\gamma \in [1E-8; 1E-1]$

Как видно из данных таблицы 2 и поверхностной диаграммы (рисунок 3), в горячем режиме зона минимальных значений функционала наблюдается при  $\beta \in [5E+5; 1E+6]$ . При  $\beta \in [2E+6; 1E+7]$ ,  $\gamma \in [1E-8; 1E-6]$  выявлена зона практически по-

стоянных (стабильных) значений функционала, что наблюдается и в промежуточном режиме. Варьирование параметра  $\gamma$  в пределах  $\beta \in [5E+5; 1E+8]$  практически не оказывает влияния на значение функционала, но при  $\gamma \geq E-2$  значение функционала резко возрастает – наблюдается первая зона флуктуации. Как показали исследования, такая же закономерность имеется и при промежуточном режиме нагрева. Вторая зона флуктуаций в горячем режиме выявлена при  $\beta < 5E+5$ ,  $\gamma \in [1E-8; 1E-1]$ .

Из поверхностных диаграмм (рисунки 2, 3) видно, что по сравнению с промежуточным режимом, в горячем режиме нагрева зона минимальных значений функционала смещается в сторону уменьшения параметра  $\beta$  на два порядка. Так в промежуточном режиме нагрева зона минимальных значений при  $\beta \in [3E+7; 5E+7]$ , а в горячем при  $\beta \in [5E+5; 1E+6]$ .

Характер влияния параметра  $\beta$  на минимизируемый функционал в зоне благоприятных значений параметра  $\gamma \in [1E-8; 1E-5]$ , представлен на рисунке 4.

На рисунке 4 и из сопоставления данных таблиц 1 и 2 видно, что для обоих режимов нагрева при увеличении параметра  $\beta$  (для промежуточного режима до  $\beta = 3E+7$ , для горячего – до  $\beta = 7E+5$ ), значения функционала сначала резко падают до минимального значения, т. е. происходит переход из зоны флуктуаций в зону минимальных значений функционала. При дальнейшем увеличении параметра  $\beta$  значения функционала растут, причем в промежуточном режиме рост происходит незначительными темпами, так увеличение с  $\beta = 5E+7$  до  $\beta = 1E+9$  приводит к росту функционала в среднем на 3%, минимальный рост зафиксирован при  $\gamma = 1E-8$  и составляет 1%, максимальный – при  $\gamma = 1E-5$  составляет 9%.

В горячем режиме при выходе параметра  $\beta$  из зоны минимальных значений в большую сторону, значения функционала растут быстрее. Так изменение параметра  $\beta = 2E+6$  до  $\beta = 1E+8$  приводит к росту функционала в среднем на 34%, и колеблется при варьировании параметра  $\gamma \in [1E-5; 1E-8]$  в пределах 33–35%. Следовательно, влияние параметра  $\gamma$  в промежуточном режиме сильнее, чем в горячем.

Зависимость функционала энергии от параметра  $\gamma$  представлена на рисунке 5.

Из данных таблиц 1 и 2 и кривых на рисунке 4 видно, что при уменьшении параметра  $\gamma$  от  $\gamma = 1E-1$  до  $\gamma = 1E-5$  значения функционала уменьшаются тем значительнонее, чем больше  $\beta$ . Дальнейшее уменьшение этого параметра ниже  $1E-6$  нецелесообразно, т. к. это не оказывает существенного влияния на величину функционала, как в промежуточном так и в горячем режимах нагрева.

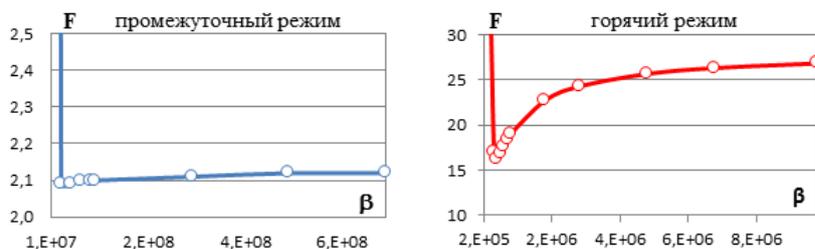


Рисунок 4 – Зависимость функционала энергии от параметра  $\beta$

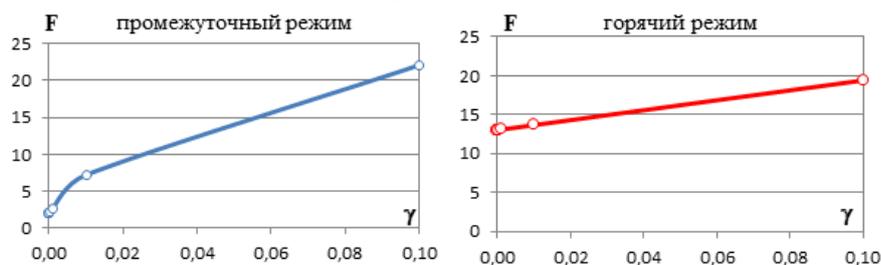


Рисунок 5 – Зависимость функционала энергии от параметра  $\gamma$

**Выводы.** Штрафной параметр  $\beta$  как в горячем, так и в промежуточном режимах нагрева оказывает доминирующее влияние на величину функционала энергии. Причем в горячем режиме это влияние более существенно.

Влияние параметра  $\gamma$  в зонах, благоприятных по параметру  $\beta$ , несущественно как в горячем, так и в промежуточном режимах нагрева.

В промежуточном режиме при  $\gamma = 0,1$ ,  $\beta \in [7E+6; 1E+9]$  и при  $\beta = 7E+6$ ,  $\gamma \in [1E-6; 1E-1]$  возникают зоны флуктуации. В горячем режиме эти зоны также наблюдаются, но при  $\beta < 5E+5$ ,  $\gamma \in [1E-8; 1E-1]$  и при  $\gamma \geq E-2$ ,  $\beta > 2E+6$ . При попадании параметров  $\beta$ ,  $\gamma$  в зоны флуктуации, значения функционала в промежуточном режиме изменяются значительно, нежели в горячем режиме. Влияние параметра  $\gamma$  более существенно в промежуточном режиме.

Выявлены зоны благоприятных (стабильных) значений функционала: в промежуточном режиме нагрева при  $\beta \in [1E+7; 1E+8]$ ,  $\gamma \in [1E-4; 1E-8]$ , а в горячем – при  $\beta \in [2+6; 1+7]$ ,  $\gamma \in [1E-8; 1E-6]$ .

В промежуточном режиме нагрева зона минимальных значений наблюдается при  $\beta \in [3E+7; 5E+7]$ , а в горячем – при  $\beta \in [5E+5; 1E+6]$ . Таким образом, по сравнению с промежуточным режимом нагрева зона минимальных значений функционала смещается на два порядка в сторону уменьшения параметра  $\beta$ .

#### Литература

1. Ковалева Л.А., Насыров Н.М., Максимочкин В.И., Суфьянов Р.Р. Изучение теплопроводности вы-

соковязких углеводородных систем методом экспериментального и математического моделирования / Л.А. Ковалева, Н.М. Насыров, В.И. Максимочкин, Р.Р. Суфьянов // ПМТФ. 2005. Т. 46. В. 6. С. 96–102.

2. Егоров А.И. Основы теории управления / А.И. Егоров. М.: Физматлит, 2004. 504 с.
3. Лелевкина Л.Г., Гончарова И.В., Комарцова Е.А. Численный анализ влияния штрафных параметров на процесс оптимизации индукционного нагрева обсадной колонны нефтяной скважины в промежуточном режиме нагрева / Л.Г. Лелевкина, И.В. Гончарова, Е.А. Комарцова // Матер. II между. юбил. научн. конф. "Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений". Бишкек: КРСУ, 2013. С. 52.
4. Lelevkina L.G., Sklyar S.N. and Khlybov O.S. Optimal Control and Heat Conductivity / L.G. Lelevkina, S.N. Sklyar and O.S. Khlybov // Automation and Remote Control, Springer Science + Business Media. 2008, Vol. 69, N 4. P. 654–667.
5. Лелевкина Л.Г., Скляр С.Н., Хлыбов О.С. Оптимальное управление процессом теплопроводности / Л.Г. Лелевкина, С.Н. Скляр, О.С. Хлыбов // Автоматика и телемеханика. 2008. № 4. С. 119–133.
6. Лелевкина Л.Г., Гончарова И.В., Комарцова Е.А. Применение функций Кельвина в решении задачи оптимизации индукционного нагрева обсадной колонны нефтяной скважины / Л.Г. Лелевкина, И.В. Гончарова, Е.А. Комарцова // Тр. X между. Азиатской школы-семинара "Проблемы оптимизации сложных систем". Бишкек, 2014. С. 464–472.