УДК 517.968

О РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

З.А. Каденова

На основе метода неотрицательных квадратичных форм для линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными доказаны теоремы единственности.

Ключевые слова: линейные интегральные уравнения первого рода с двумя независимыми переменными; единственность.

Постановка задача: Рассматривается интегральные уравнения первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях. Требуется доказать единственность решений интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях.

Рассмотрим уравнения вида

$$\int_a^b K(t,x,y)u(t,y)dy+\int_{t_0}^{\infty} H(t,x,s)u(s,x)ds+\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b C(t,x,s,y)u(s,y)dyds=$$

$$=f(t,x),(t,x)\in G=\left\{(t,x)\in R^2 : t_0\le t<\infty,\ a\le x\le b\right\}, \tag{1}$$

где

$$K(t,x,y)=\begin{cases}A(t,x,y), & (t,x,y)\in G_1,\\ B(t,x,y), & (t,x,y)\in G_2,\end{cases} \tag{2}$$

$$H(t,x,s)=\begin{cases}M(t,x,s), & (t,x,s)\in G_3,\\ N(t,x,s), & (t,x,s)\in G_4,\end{cases} \tag{3}$$

$A(t,x,y)$, $B(t,x,y)$, $M(t,x,s)$, $N(t,x,s)$, $C(t,x,s,y)$ – известные непрерывные функции, определенные соответственно в области

$G_1=\left\{(t,x,y),\quad t_0\le t<\infty,\quad a\le y\le x\le b\right\}$,

$G_2=\left\{(t,x,y),\quad t_0\le t<\infty,\quad a\le x\le y\le b\right\}$,

$G_3=\left\{(t,x,s),\quad t_0\le s\le t<\infty,\quad a\le x\le b\right\}$,

$G_4=\left\{(t,x,s),\quad t_0\le t\le s<\infty,\quad a\le x\le b\right\}$, $G^2=G\times G$,

$f(t,x)$ – известная функция и $f(t,x)\in L_2(G)$, а $u(t,x)$ – неизвестная функция, $(t,x)\in G$.

Различные вопросы интегральных уравнений первого рода исследовались в [1–8]. Но основополагающие результаты для интегральных уравнений Фредгольма первого рода получены в [2, 3], где для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву. Единственность решения операторных уравнений Вольтерра рассмотрена в [6]. Единственность решения для одного класса интегральных уравнений Фредгольма первого рода рассмотрена в [7]. В данной работе доказывается единственность решения уравнения (1) в классе $L_2(G)$.

Предполагается, что ядро $C(t,x,s,y)$ – интегрируемо с квадратом в области G^2 т. е. $C(t,x,s,y)\in L_2(G^2)$ и разлагается в ряд

$$C(t,x,s,y)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\phi_i(t,x)\phi_i(s,y),\ m\le\infty,\quad 0\le\lambda_i,\quad i=1,2,...,m. \tag{4}$$

где $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$ – собственные значения ядра $C(t,x,s,y)$, расположенные в порядке убывания их модулей $|\lambda_1|\ge|\lambda_2|\ge...$ и $\phi_1(t,x),\ \phi_2(t,x),...$ соответствующие ортонормированные собственные функции из $L_2(G)$.

Обозначим

$$\begin{cases}P(s,y,z)=A(s,y,z)+B(s,z,y),\ (s,y,z)\in G_1,\\ Q(s,y,\tau)=M(s,y,\tau)+N(\tau,y,s),\ (s,y,\tau)\in G_3.\end{cases} \tag{5}$$

Потребуем выполнения следующих условий:

1) $P(s,b,a)\in C[t_0,\infty),\ P(s,b,a)\ge 0,$ для любого $s\in[t_0,\infty)$,

$P'_y(s,y,a)\in C(G),\ P'_y(s,y,a)\le 0,$ для любого $(s,y)\in G$,

$P'_z(s,b,z)\in C(G),\ P'_z(s,b,z)\ge 0,$ для любого $(s,z)\in G$,

$P''_{zy}(s,y,z)\in C(G_1),\ P''_{zy}(s,y,z)\le 0,$ для любого $(s,y,z)\in G_1$,

и для любого

$v(t,x)\in L_2(G)$,

$$\int_a^x A(t,x,y)v(t,y)dy,\ \int_x^b B(t,x,y)v(t,y)dy,\ \int_{t_0}^t M(t,x,s)v(s,x)ds,\ \int_t^\infty N(t,x,s)v(s,x)ds\in L_2(G),$$

где $C[t_0,\infty),\ C(G)$ и $C(G_1)$ – пространство всех непрерывных и ограниченных функций соответственно в области $[t_0,\infty),\ G$ и G_1;

2)

$\lim\limits_{t\to\infty}Q(t,y,t_0)\in C[a,b],\ \lim\limits_{t\to\infty}Q(t,y,t_0)\ge 0,\ \forall y\in[a,b]$,

$Q'_s(s,y,t_0)\in C(G),\ Q'_s(s,y,t_0)\le 0,\ \forall(s,y)\in G$,

$\lim\limits_{t\to\infty}Q'_\tau(t,y,\tau)\in C(G),\ \lim\limits_{t\to\infty}Q'_\tau(t,y,\tau)\ge 0,\ \forall\ (y,\tau)\in G$,

$Q''_{\tau s}(s,y,\tau)\in C(G_3),\ Q''_{\tau s}(s,y,\tau)\le 0,\ \forall(s,y,\tau)\in G_3$,

где $C(G_3)$ – пространство всех непрерывных и ограниченных функций в G_3;

3) Выполняется хотя бы одно из следующих четырех условий:

а) при почти всех $(s,y)\in G\quad P'_y(s,y,a)<0$;

б) при почти всех $(s,z)\in G\quad P'_z(s,b,z)>0$;

в) при почти всех $(s,y)\in G\quad Q'_s(s,y,t_0)<0$;

г) при почти всех $(\tau,y)\in G\quad \lim\limits_{t\to\infty}Q'_\tau(t,y,\tau)>0$.

4) Ядро $C(t,x,s,y)$ – представимо в виде (4) и в разложении (4) все элементы последовательности $\{\lambda_i\}$ неотрицательны.

Теорема 1. Пусть выполняются условия 1), 2), 3) и 4). Тогда решение $u(t,x)$ уравнения (1) единственно в пространстве $L_2(G)$.

Доказательство. В силу (2), (3) уравнение (1) запишем в виде

$$\begin{aligned}&\int_a^x A(t,x,y)u(t,y)dy+\int_x^b B(t,x,y)u(t,y)dy+\int_{t_0}^t M(t,x,s)u(s,x)ds+\\ &\int_t^\infty N(t,x,s)u(s,x)ds+\int_{t_0}^\infty\int_a^b C(t,x,s,y)u(s,y)dyds=f(t,x).\end{aligned} \tag{6}$$

Обе части уравнения (6) умножим на $u(t,x)$, и интегрируя по области G, имеем

$$\int_a^b\int_{t_0}^\infty\int_a^y A(s,y,z)u(s,z)u(s,y)dzdsdy+\int_a^b\int_{t_0}^\infty\int_y^b B(s,y,z)u(s,z)u(s,y)dzdsdy+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^\infty\int_{t_0}^s M(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)\,d\tau dsdy+\int_a^b\int_{t_0}^\infty\int_s^\infty N(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)\,d\tau dsdy+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^\infty\int_{t_0}^\infty\int_a^b C(s,y,\tau,z)u(\tau,z)u(s,y)\,dzd\tau dsdy=\int_a^b\int_{t_0}^\infty f(s,y)u(s,y)\,dsdy. \qquad (7)$$

Применяя формулу Дирихле, из (7) имеем

$$\int_a^b\int_{t_0}^\infty\int_a^y\big[A(s,y,z)+B(s,z,y)\big]u(s,z)u(s,y)\,dzdsdy+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^\infty\int_{t_0}^s\big[M(s,y,\tau)+N(\tau,y,s)\big]u(\tau,y)u(s,y)\,d\tau dsdy+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^\infty\int_{t_0}^\infty\int_a^b C(s,y,\tau,z)u(\tau,z)u(s,y)\,dzd\tau dsdy=\int_a^b\int_{t_0}^\infty f(s,y)u(s,y)\,dsdy.$$

Отсюда, учитывая обозначения (5), получим

$$\int_{t_0}^\infty\int_a^b\int_a^y P(s,y,z)u(s,z)u(s,y)\,dzdyds+\int_{t_0}^\infty\int_a^b\int_{t_0}^s Q(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)\,d\tau dyds+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^\infty\int_{t_0}^\infty\int_a^b C(s,y,\tau,z)u(\tau,z)u(s,y)\,dzd\tau dsdy=\int_a^b\int_{t_0}^\infty f(s,y)u(s,y)\,dsdy. \qquad (8)$$

Преобразуем первые два интеграла левой части уравнения (8). Дважды интегрируя по частям и применяя формулу Дирихле, имеем

$$\int_{t_0}^\infty\int_a^b\int_a^y P(s,y,z)u(s,z)u(s,y)\,dzdyds=-\int_{t_0}^\infty\int_a^b\int_a^y P(s,y,z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\int_z^y u(s,\nu)\,d\nu\right)dz\;u(s,y)\,dyds=$$

$$=-\int_{t_0}^\infty\int_a^b\left\{P(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,\nu)\,d\nu\right)\Bigg|_a^y-\int_a^y P'_z(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,\nu)\,d\nu\right)dz\right\}u(s,y)\,dyds=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_0}^\infty\int_a^b P(s,y,a)\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_a^y u(s,\nu)\,d\nu\right)^2\right]dyds+\frac{1}{2}\int_{t_0}^\infty\int_a^b\int_z^b P'_z(s,y,z)\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_z^y u(s,\nu)\,d\nu\right)^2\right]dydzds=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_0}^\infty\left[P(s,y,a)\left(\int_a^y u(s,\nu)\,d\nu\right)^2\right]\Bigg|_a^b ds-\frac{1}{2}\int_{t_0}^\infty\int_a^b P'_y(s,y,a)\left(\int_a^y u(s,\nu)\,d\nu\right)^2 dyds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^\infty\int_a^b\left[P'_z(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,\nu)\,d\nu\right)^2\right]\Bigg|_z^b dzds-\frac{1}{2}\int_{t_0}^\infty\int_a^b\int_z^b P''_{zy}(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,\nu)\,d\nu\right)^2 dydzds=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_0}^\infty P(s,b,a)\left(\int_a^b u(s,\nu)\,d\nu\right)^2 ds-\frac{1}{2}\int_{t_0}^\infty\int_a^b P'_y(s,y,a)\left(\int_a^y u(s,\nu)\,d\nu\right)^2 dyds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^\infty\int_a^b P'_z(s,b,z)\left(\int_z^b u(s,\nu)\,d\nu\right)^2 dzds-\frac{1}{2}\int_{t_0}^\infty\int_a^b\int_a^y P''_{zy}(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,\nu)\,d\nu\right)^2 dzdyds; \qquad (9)$$

где $P'_t(t,x,s)$, $P'_y(t,x,s)$ – частные производные по t и s соответственно.

Аналогично этому для второго интеграла имеем

$$\int_a^b\int_{t_0}^\infty\int_{t_0}^s Q(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)\,d\tau dsdy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^b\lim_{t\to\infty}Q(t,y,t_0)\left(\int_{t_0}^\infty u(\xi,y)\,d\xi\right)^2 dy-\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^\infty Q'_s(s,y,t_0)\left(\int_{t_0}^s u(\xi,y)\,d\xi\right)^2 dsdy+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\lim_{t\to\infty}Q'_\tau(t,y,\tau)\left(\int_\tau^{\infty}u(\xi,y)d\xi\right)^2 d\tau dy-\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{s}Q''_{\tau s}(s,y,\tau)\left(\int_\tau^{s}u(\xi,y)d\xi\right)^2 d\tau ds dy. \qquad (10)$$

Подставляя (9), (10) в (8) и учитывая (4), получим

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}P(s,b,a)\left(\int_a^b u(s,\nu)d\nu\right)^2 ds-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b P'_y(s,y,a)\left(\int_a^y u(s,\nu)d\nu\right)^2 dyds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b P'_z(s,b,z)\left(\int_z^b u(s,\nu)d\nu\right)^2 dzds-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b\int_a^y P''_{zy}(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right)^2 dzdyds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\lim_{t\to\infty}Q(t,y,t_0)\left(\int_{t_0}^{\infty}u(\xi,y)d\xi\right)^2 dy-\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^{\infty}Q'_s(s,y,t_0)\left(\int_{t_0}^{s}u(\xi,y)d\xi\right)^2 dsdy+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\lim_{t\to\infty}Q'_\tau(t,y,\tau)\left(\int_\tau^{\infty}u(\xi,y)d\xi\right)^2 d\tau dy-\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{s}Q''_{\tau s}(s,y,\tau)\left(\int_\tau^{s}u(\xi,y)d\xi\right)^2 d\tau dsdy+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left(\int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\phi_i(s,y)u(s,y)dsdy\right)^2=\int_a^b\int_{t_0}^{\infty}f(s,y)u(s,y)dsdy,\ (t,x)\in G. \qquad (11)$$

Пусть $f(t,x)\equiv 0,\ (t,x)\in G.$

Тогда учитывая условия 1), 2), 3) и 4) из (11), имеем

$\int_{t_0}^{s}u(\xi,y)d\xi=0,\ \ (s,y)\in G$ или $\int_a^y u(s,\nu)d\nu=0,\ \ (s,y)\in G.$

Отсюда $u(t,x)=0,$ при всех $(t,x)\in G.$ Теорема 1. доказана.

Литература

1. *Магницкий Н.А.* Линейные интегральные уравнения Вольтера первого рода и третьего рода // Журнал вычислительной математики и математический физики. 1979. Т. 19. № 4. С. 970–989.
2. *Лаврентьев М.М.* Об интегральных уравнениях первого рода // ДАН СССР. 1959. Т.127. № 1. С. 31–33.
3. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
4. *Иманалиев М.И., Асанов А.* О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода // ДАН СССР. 1989. Т. 309. № 5. С. 1052–1055.
5. *Иманалиев М.И., Асанов А.* // ДАН 2007. Т. 415. № 1. С. 14–17.
6. *Асанов А.* О единственности решения операторных уравнений Вольтерра // Известия АН Киргизской ССР, 1988. № 1. С. 13–18.
7. *Асанов А., Каденова З.А.* О единственности решения для одного класса интегральных уравнений Фредгольма первого рода // Матер. Всерос. науч. конф. "Математическое моделирование и краевые задачи". Самара: СамГТУ, 2004. Ч. 3. С. 122–126.
8. *Asanov A.* Regularization, Uniqueness and Existence of Solutions of Volterra Equations of the First Kind. Amsterdam: VSP, 1998. 276 p.