УДК 517.968

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

З.А. Каденова

На основе метода неотрицательных квадратичных форм для систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными доказаны теоремы единственности.

Ключевые слова: система линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными; единственность.

Постановка задачи. Рассматривается система линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными. Требуется доказать единственность решений систем линейных интегральных первого рода с двумя независимыми переменными.

Рассмотрим систему уравнений

$$Ku \equiv \int_a^b K(t,x,y)u(t,y)dy + \int_{t_0}^t H(t,x,s)u(s,x)ds + \int_{t_0}^t \int_a^x C(t,x,s,y)u(s,y)dyds =$$

$$= f(t,x),\ (t,x) \in G,\ \ G = \{(t,x) \in R^2 : t_0 \le t \le T,\ a \le x \le b\}, \tag{1}$$

где

$$K(t,x,y) = \begin{cases} A(t,x,y),\ (t,x,y) \in G_1, \\ B(t,x,y),\ (t,x,y) \in G_2, \end{cases} \tag{2}$$

$A(t,x,y),\ B(t,y,x),\ H(t,x,s),\ C(t,x,s,y)$ – известные n×n-мерные матричные функции, определенные соответственно в области

$$G_1 = \{(t,x,y):\quad t_0 \le t \le T,\quad a \le y \le x \le b\};$$

$$G_2 = \{(t,x,y):\quad t_0 \le t \le T,\quad a \le x \le y \le b\};$$

$$G_3 = \{(t,x,s):\quad t_0 \le s \le t \le T,\quad a \le x \le b\};$$

$$G_4 = \{(t,x,s,y):\quad t_0 \le s \le t \le T,\quad a \le y \le x \le b\},$$

$f(t,x)$ – известная вектор-функция и $u(t,x)$ – неизвестная, n-мерные вектор-функции.

Различные вопросы для систем интегральных уравнений первого и третьего рода исследовались в [1–10]. Но основополагающие результаты для интегральных уравнений Фредгольма первого рода получены в [2, 3], где для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву. В [1] для линейных интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего рода с гладкими ядрами доказано существование многопараметрического семейства решений. В [6] изучены вопросы регуляризации и единственности решений линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода. В данной работе исследуется единственность решений систему уравнений (1).

Введем следующие обозначения:

1. Совокупность всех матриц, действующих в R^n обозначим М, < . , . > – скалярное произведение в R^n, $\|A\|, \|u\|$ – нормы соответственно n×n-мерной матрицы $A = (a_{ij}) \in M$ и n-мерного вектора u, т. е. для любых $u = (u_1, u_2, ..., u_n),\ \vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, ..., \vartheta_n) \in R^n$

$$\langle u, \vartheta \rangle = u_1\vartheta_1 + u_2\vartheta_2 + ... + u_n\vartheta_n,$$

$\|u\| = \sqrt{\langle u,u \rangle}, \quad \|A\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij} \right)^2 \right)^{1/2}$;

2. $L_{2,n}(G)$ – пространство n-мерных вектор-функций с элементами из $L_2(G)$, $\|\cdot\|_{L_2}$ – норма в $L_{2,n}(G)$, т. е. для любого $u(t,x) \in L_{2,n}(G)$.

$\|u(t,x)\|_{L_2} = \left(\int_{t_0}^{T} \int_{a}^{b} \|u(t,x)\|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}}$;

3. $L_2\left(\left(G^2 \right) \; ;M \right)$ – пространство n×n-мерных матричных функций с элементами из $L_2(G^2)$,

$\|\cdot\|_{L_2}$ – норма в $L_2\left(\left(G^2 \right);M \right)$, т. е. для любого $A(t,x,s,y) \in L_2\left(\left(G^2 \right) \; ;M \right)$

$\|A(t,x,s,y)\|_{L_2} = \left(\int_{t_0}^{T} \int_{t_0}^{T} \int_{a}^{b} \int_{a}^{b} \|A(t,x,s,y)\|^2 dydxdsdt \right)^{\frac{1}{2}}$.

Обозначим

$$P(s,y,z) = A(s,y,z) + B^*(s,z,y), \quad (s,y,z) \in G_1. \tag{3}$$

где $B^*(s,z,y)$ – сопряженная матрица к матрице $B(s,z,y)$.

Потребуем выполнения следующих условий:

1. $P^*(s,y,z) = P(s,y,z) \forall (s,y,z) \in G_1$, $C^*(t,x,s,y) = C(t,x,s,y)$ $(t,x,s,y) \in G_4$;

2. Матрицы $P(s,b,a)$, $H(T,y,t_0)$, $P_z'(s,b,z)$, $H_\tau'(T,y,\tau)$ – неотрицательны соответственно при всех значениях $s \in [t_0,T]$, $y \in [a,b]$, (s,z), $(\tau,y) \in G$, $\|P(s,b,a)\| \in C[t_0,T]$, $\|H(T,y,t_0)\| \in C[a,b]$, $\|P_z'(s,b,z)\| \in C(G)$, $\|H_\tau'(T,y,\tau)\| \in C(G)$.

3. Матрицы $P_y'(s,y,a), H_s'(s,y,t_0)$, $P_{zy}''(s,y,z), H_{\tau s}''(s,y,\tau)$ – неположительны соответственно при всех значениях $(s,y) \in G$, $(s,y,z) \in G_1$, $(s,y,\tau) \in G_3$, $\|P_y'(s,y,a)\| \in C(G)$, $\|H_s'(s,y,t_0)\| \in C(G)$, $\|P_{zy}''(s,y,z)\| \in C(G_1)$, $\|H_{\tau s}''(s,y,\tau)\| \in C(G_3)$;

4. $C(T,b,t_0,a) \geq 0$, $\|C_s'(s,b,t_0,a)\| \in C[t_0,T]$, $C_s'(s,b,t_0,a) \leq 0 \; \forall s \in [t_0,T]$,

$\|C_\tau'(T,b,\tau,a)\| \in C[t_0,T]$, $C_\tau'(T,b,\tau,a) \geq 0 \; \forall \tau \in [t_0,T]$,

$\|C_y'(T,y,t_0,a)\| \in C[a,b]$, $C_y'(T,y,t_0,a) \leq 0 \; \forall y \in [a,b]$,

$\|C_z'(T,b,t_0,z)\| \in C[a,b]$, $C_z'(T,b,t_0,z) \geq 0$, $z \in [a,b]$,

$\|C_{sy}''(s,y,t_0,a)\| \in C(G)$, $C_{sy}''(s,y,t_0,a) \geq 0 \; \forall (s,y) \in G$,

$\|C_{\tau y}''(T,y,\tau,t_0)\| \in C(G)$, $C_{\tau y}''(T,y,\tau,t_0) \leq 0 \; (y,\tau) \in G$,

$\|C_{zs}''(s,b,t_0,z)\| \in C(G)$, $C_{zs}''(s,b,t_0,z) \leq 0 \; \forall (s,z) \in G$,

$\|C_{\tau z}''(T,b,\tau,z)\| \in C(G)$, $C_{\tau z}''(T,b,\tau,z) \geq 0 \; \forall (\tau,z) \in G$,

$\|C_{\tau sy}'''(s,y,\tau,a)\| \in C(G_3)$, $C_{\tau sy}'''(s,y,\tau,a) \geq 0 \; \forall (s,y,\tau) \in G_3$,

$\|C_{\tau zs}'''(s,b,\tau,z)\| \in C(G_3)$, $C_{\tau zs}'''(s,b,\tau,z) \leq 0 \; \forall (s,z,\tau) \in G_3$,

$\|C_{zsy}'''(s,y,t_0,z)\| \in C(G_1)$, $C_{zsy}'''(s,y,t_0,z) \geq 0 \forall \; (s,y,z) \in G_1$,

$\|C_{\tau zy}'''(T,y,\tau,z)\| \in C(G_1)$, $C_{\tau zy}'''(T,y,\tau,z) \leq 0 \forall \; (\tau,y,z) \in G_1$,

$\|C_{\tau zsy}^{(IV)}(s,y,\tau,z)\| \in C(G_4)$, $C_{\tau zsy}^{(IV)}(s,y,\tau,z) \geq 0 \; \forall (s,y,\tau,z) \in G_4$,

$\|C_{\tau s}''(s,b,\tau,a)\| \in C(G_5)$, $C_{\tau s}''(s,b,\tau,a) \leq 0 \; \forall (s,\tau) \in G_5 = \{(s,\tau) : t_0 \leq \tau \leq s \leq T\}$,

$\|C_{zy}''(T,y,t_0,z)\| \in C(G_6)$, $C_{zy}''(T,y,t_0,z) \leq 0$, $(y,z) \in G_6 = \{(y,z) : a \leq z \leq y \leq b\}$.

5. При почти всех $(s,y,\tau,z)\in G_4$ и для любых $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in R^n$:

$$L(s,y,\tau,z,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\frac{1}{(s-t_0)(y-a)}\cdot\Big\{\Big\langle\big(-P'_y(s,y,a)\big)\alpha_1,\alpha_1\Big\rangle+$$
$$+\Big\langle\big(-H'_s(s,y,t_0)\big)\alpha_2,\alpha_2\Big\rangle+2\Big\langle\big(-C(s,y,t_0,a)\big)\alpha_1,\alpha_2\Big\rangle+$$
$$+(s-t_0)\Big[\Big\langle\big(-H''_{\tau s}(s,y,\tau)\big)\alpha_3,\alpha_3\Big\rangle+2\Big\langle\big(-C'_\tau(s,y,\tau,a)\big)\alpha_3,\alpha_1\Big\rangle\Big]+$$
$$+(y-a)\Big[\,2\Big\langle\big(-C'_z(s,y,t_0,z)\big)\alpha_2,\alpha_4\Big\rangle+\Big\langle\big(-P''_{zy}(s,y,z)\big)\alpha_4,\alpha_4\Big\rangle\,\Big]+$$
$$+(s-t_0)(y-a)\Big\langle\big(-2C''_{\tau z}(s,y,\tau,z)\big)\alpha_3,\alpha_4\Big\rangle\Big\}\ge 0.$$

6. Если при всех $(s,y,\tau,z)\in G_4$ $L(s,y,\tau,z,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=0$, то выполняется хотя бы одно из следующих условий:

а) $\alpha_1=0$; б) $\alpha_2=0$; в) $\alpha_3=0$; г) $\alpha_4=0$.

Теорема. Пусть выполняются условия (1–6). Тогда решение системы (1) единственно в пространстве $L_{2,n}(G)$.

Доказательство. В силу (2) систему уравнений (1) запишем в виде

$$\int_a^x A(t,x,y)u(t,y)\,dy+\int_x^b B(t,x,y)u(t,y)\,dy+\int_{t_0}^t H(t,x,s)u(s,x)\,ds+$$
$$+\int_{t_0}^t\int_a^x C(t,x,s,y)u(s,y)\,dyds=f(t,x),\quad (t,x)\in G. \tag{4}$$

Обе части системы (4) скалярно умножим на $u(t,x)$ и интегрируем по области G:

$$\int_a^b\int_{t_0}^T\left\langle\int_a^y A(s,y,z)u(s,z)\,dz,u(s,y)\right\rangle dsdy++\int_a^b\int_{t_0}^T\left\langle\int_y^b B(s,y,z)u(s,z)\,dz,u(s,y)\right\rangle dsdy+$$
$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\left\langle\int_{t_0}^s H(s,y,\tau)u(\tau,y)\,d\tau,u(s,y)\right\rangle dsdy++\int_a^b\int_{t_0}^T\left\langle\int_{t_0}^s\int_a^y C(s,y,\tau,z)u(\tau,z)\,dzd\tau,u(s,y)\right\rangle dsdy=$$
$$=\int_a^b\int_{t_0}^T\big\langle f(s,y),u(s,y)\big\rangle dsdy. \tag{5}$$

Применяя формулу Дирихле и учитывая обозначения (3) из (5), имеем

$$\int_{t_0}^T\int_a^b\left\langle\int_a^y P(s,y,z)u(s,z)\,dz,u(s,y)\right\rangle dyds+\int_{t_0}^T\int_a^b\left\langle\int_{t_0}^s H(s,y,\tau)u(\tau,y)\,d\tau,u(s,y)\right\rangle dyds+$$
$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\left\langle\int_{t_0}^s\int_a^y C(s,y,\tau,z)u(\tau,z)\,dzd\tau,u(s,y)\right\rangle dsdy=\int_a^b\int_{t_0}^T\big\langle f(s,y),u(s,y)\big\rangle dsdy. \tag{6}$$

Преобразуем каждый из интегралов левой части (6). Известно, что, если K – самосопряженная матричная функция размеров n×n, то

$$\langle K\vartheta,\vartheta'_s\rangle=\frac{1}{2}\big(\langle K\vartheta,\vartheta\rangle\big)'_s-\frac{1}{2}\langle K'_s\vartheta,\vartheta\rangle; \tag{7}$$

где ϑ – некоторый n-мерный вектор-функция.

Далее, имея в виду, что

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int_\tau^s u(\xi,y)\,d\xi=-u(\tau,y)$$

с помощью интегрирования по частям, применяя формулу Дирихле и с учетом (7) первый слагаемый левой части (6) преобразуем к виду

$$\int_{t_0}^T\int_a^b\left\langle\int_a^y P(s,y,z)u(s,z)\,dz,u(s,y)\right\rangle dyds=-\int_{t_0}^T\int_a^b\left\langle\int_a^y P(s,y,z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\int_z^y u(s,\nu)\,d\nu\right)dz,u(s,y)\right\rangle dyds=$$
$$=\int_{t_0}^T\int_a^b\left\{\left\langle P(s,y,a)\left(\int_a^y u(s,\nu)\,d\nu\right),\left(\int_a^y u(s,\nu)\,d\nu\right)'_y\right\rangle\right\}+\int_a^y\left\langle P'_z(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,\nu)\,d\nu\right),\left(\int_z^y u(s,\nu)\,d\nu\right)'_y\right\rangle dyds=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left\langle P(s,b,a)\left(\int_a^b u(s,\nu)d\nu\right),\int_a^b u(s,\nu)d\nu\right\rangle ds-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_a^b\left\langle P'_y(s,y,a)\left(\int_a^y u(s,\nu)d\nu\right),\int_a^y u(s,\nu)d\nu\right\rangle dyds+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_a^b\left\langle P'_z(s,b,z)\left(\int_z^b u(s,\nu)d\nu\right),\int_z^b u(s,\nu)d\nu\right\rangle dzds-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_a^b\int_a^y\left\langle P''_{zy}(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right),\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right\rangle dzdyds. \quad (8)$$

Аналогично, для второго слагаемого имеем

$$\int_{t_0}^{T}\int_a^b\left\langle\int_{t_0}^{s}H(s,y,\tau)u(\tau,y)d\tau,u(s,y)\right\rangle dyds=\frac{1}{2}\int_a^b\left\langle H(T,y,t_0)\int_{t_0}^{T}u(\xi,y)d\xi,\int_{t_0}^{T}u(\xi,y)d\xi\right\rangle dy-$$
$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_a^b\left\langle H'_s(s,y,t_0)\int_{t_0}^{s}u(\xi,y)d\xi,\int_{t_0}^{s}u(\xi,y)d\xi\right\rangle dyds+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_a^b\left\langle H'_\tau(T,y,\tau)\int_\tau^T u(\xi,y)d\xi,\int_\tau^T u(\xi,y)d\xi\right\rangle dyd\tau-$$
$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_a^b\int_{t_0}^{s}\left\langle H''_{\tau s}(s,y,\tau)\int_\tau^s u(\xi,y)d\xi,\int_\tau^s u(\xi,y)d\xi\right\rangle d\tau dyds. \quad (9)$$

Для преобразования третьего слагаемого используем соотношение

$$KU''_{\tau z}=(KU)''_{\tau z}-(K'_\tau U)'_z-(K'_z U)'_\tau+K''_{\tau z}U, \quad (10)$$

где $K=K^*$, самосопряженная матричная функция размеров n×n, а U – n-мерная вектор-функция.

Методом интегрирования по частям с учетом (10) и имея в виду

$$\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial z}\left[\int_\tau^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right]=u(\tau,z);\ (s,y)\in G,\ (\tau,z)\in G,$$

третий слагаемый левой части (6) приводится к виду

$$\int_a^b\int_{t_0}^{T}\left\langle\int_{t_0}^{s}\int_a^y C(s,y,\tau,z)u(\tau,z)dzd\tau,u(s,y)\right\rangle dsdy=$$
$$=\int_a^b\int_{t_0}^{T}\left\langle\int_{t_0}^{s}\int_a^y C(s,y,\tau,z)\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial z}\left(\int_\tau^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)dzd\tau,u(s,y)\right\rangle dsdy=$$
$$=\int_a^b\int_{t_0}^{T}\left\langle C(s,y,t_0,a)\int_{t_0}^{s}\int_a^y u(\xi,\nu)d\nu d\xi,u(s,y)\right\rangle dsdy+$$
$$+\int_a^b\int_{t_0}^{T}\left\langle\int_\tau^T C'_\tau(s,y,\tau,a)\int_\tau^s\int_a^y u(\xi,\nu)d\nu d\xi,u(s,y)\right\rangle dsd\tau dy+$$
$$+\int_a^b\int_{t_0}^{T}\left\langle\int_z^b C'_z(s,y,t_0,z)\int_{t_0}^{s}\int_z^y u(\xi,\nu)d\nu d\xi,u(s,y)\right\rangle dydsdz+$$
$$+\int_a^b\int_{t_0}^{T}\left\langle\int_\tau^T\int_z^b C''_{\tau z}(s,y,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\nu d\xi,u(s,y)\right\rangle dydsd\tau dz. \quad (11)$$

Интегрируя по частям, с помощью соотношения

$$\left\langle K\vartheta,\vartheta''_{sy}\right\rangle=\frac{1}{2}\left(\left\langle K\vartheta,\vartheta\right\rangle\right)''_{sy}-\frac{1}{2}\left(\left\langle K'_y\vartheta,\vartheta\right\rangle\right)'_s-\frac{1}{2}\left(\left\langle K'_s\vartheta,\vartheta\right\rangle\right)'_y+\frac{1}{2}\left\langle K''_{sy}\vartheta,\vartheta\right\rangle-\left\langle K\vartheta'_y,\vartheta'_s\right\rangle,$$

где К – самосопряженная матричная функция размеров n×n, а $\vartheta(s,y)$ – n-мерный вектор-функция, и применяя формулу Дирихле (11), преобразуется к виду

$$\int_a^b\int_{t_0}^{T}\left\langle\int_{t_0}^{s}\int_a^y C(s,y,\tau,z)u(\tau,z)dzd\tau,u(s,y)\right\rangle dsdy=$$
$$=\frac{1}{2}\left\langle C(T,b,t_0,a)\int_a^b\int_{t_0}^{T}u(\xi,\nu)d\nu d\xi,\int_a^b\int_{t_0}^{T}u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right\rangle-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left\langle C'_s\left(s,b,t_0,a\right)\int_a^b\int_{t_0}^s u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi,\int_a^b\int_{t_0}^s u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi\right\rangle ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\left\langle C'_y\left(T,y,t_0,a\right)\int_a^y\int_{t_0}^T u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi,\int_a^y\int_{t_0}^T u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi\right\rangle dy+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}\left\langle C''_{sy}\left(s,y,t_0,a\right)\int_{t_0}^s\int_a^y u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi,\int_{t_0}^s\int_a^y u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi\right\rangle dsdy-$$

$$-\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}\left\langle C\left(s,y,t_0,a\right)\int_{t_0}^s u\left(\xi,y\right)d\xi,\int_a^y u\left(s,\nu\right)d\nu\right\rangle dsdy+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left\langle C'_\tau\left(T,b,\tau,a\right)\int_\tau^T\int_a^b u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi,\int_\tau^T\int_a^b u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi\right\rangle d\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s}\left\langle C''_{\tau s}\left(s,b,\tau,a\right)\int_\tau^s\int_a^b u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi,\int_\tau^s\int_a^b u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi\right\rangle d\tau ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}\left\langle C''_{\tau y}\left(T,y,\tau,t_0\right)\int_\tau^T\int_a^y u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi,\int_\tau^T\int_a^y u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi\right\rangle d\tau dy+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s}\left\langle C'''_{\tau sy}\left(s,y,\tau,a\right)\int_\tau^s\int_a^y u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi,\int_\tau^s\int_a^y u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi\right\rangle d\tau dsdy-$$

$$-\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s}\left\langle C'_\tau\left(s,y,\tau,a\right)\int_\tau^s u\left(\xi,y\right)d\xi,\int_a^y u\left(s,\nu\right)d\nu\right\rangle d\tau dsdy+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\left\langle C'_z\left(T,b,t_0,z\right)\int_{t_0}^T\int_z^b u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi,\int_{t_0}^T\int_z^b u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi\right\rangle dz-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}\left\langle C''_{zs}\left(s,b,t_0,z\right)\int_{t_0}^s\int_z^b u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi,\int_{t_0}^s\int_z^b u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi\right\rangle dsdz-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\int_{a}^{y}\left\langle C''_{zy}\left(T,y,t_0,z\right)\int_{t_0}^T\int_z^y u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi,\int_{t_0}^T\int_z^y u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi\right\rangle dzdy+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}\int_{a}^{y}\left\langle C'''_{zsy}\left(s,y,t_0,z\right)\int_{t_0}^s\int_z^y u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi,\int_{t_0}^s\int_z^y u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi\right\rangle dzdsdy-$$

$$-\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}\int_{a}^{y}\left\langle C'_z\left(s,y,t_0,z\right)\int_{t_0}^s u\left(\xi,y\right)d\xi,\int_z^y u\left(s,\nu\right)d\nu\right\rangle dzdsdy+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}\left\langle C''_{\tau z}\left(T,b,\tau,z\right)\int_\tau^T\int_z^b u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi,\int_\tau^T\int_z^b u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi\right\rangle d\tau dz-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s}\left\langle C'''_{\tau zs}\left(s,b,\tau,y\right)\int_\tau^s\int_y^b u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi,\int_\tau^s\int_y^b u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi\right\rangle d\tau dsdy-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}\int_{a}^{y}\left\langle C'''_{\tau zy}\left(T,y,\tau,z\right)\int_\tau^T\int_z^y u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi,\int_\tau^T\int_z^y u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi\right\rangle dzd\tau dy+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s}\int_{a}^{y}\left\langle C^{(IV)}_{\tau zsy}\left(s,y,\tau,z\right)\int_\tau^s\int_z^y u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi,\int_\tau^s\int_z^y u\left(\xi,\nu\right)d\nu d\xi\right\rangle dzd\tau dsdy-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s\int_a^y\left\langle C''_{\tau z}(s,y,\tau,z)\int_\tau^s u(\xi,y)\,d\xi,\int_z^y u(s,\nu)\,d\nu\right\rangle dz\,d\tau\,ds\,dy. \quad (12)$$

Подставляя соотношение (8), (9) и (12) в (6) получим:

$$\frac{1}{2}\left\langle C(T,b,t_0,a)\int_a^b\int_{t_0}^T u(\xi,\nu)\,d\nu\,d\xi,\int_a^b\int_{t_0}^T u(\xi,\nu)\,d\nu\,d\xi\right\rangle+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^T\left\{\left\langle P(s,b,a)\int_a^b u(s,\nu)\,d\nu,\int_a^b u(s,\nu)\,d\nu\right\rangle-\right.$$

$$-\left\langle C'_s(s,b,t_0,a)\int_a^b\int_{t_0}^s u(\xi,\nu)\,d\nu\,d\xi,\int_a^b\int_{t_0}^s u(\xi,\nu)\,d\nu\,d\xi\right\rangle+$$

$$\left.+\left\langle C'_s(T,b,s,a)\int_s^T\int_a^b u(\xi,\nu)\,d\nu\,d\xi,\int_s^T\int_a^b u(\xi,\nu)\,d\nu\,d\xi\right\rangle\right\}ds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\left\{\left\langle H(T,y,t_0)\int_{t_0}^T u(\xi,y)\,d\xi,\int_{t_0}^T u(\xi,y)\,d\xi\right\rangle-\right.$$

$$-\left\langle C'_y(T,y,t_0,a)\int_a^y\int_{t_0}^T u(\xi,\nu)\,d\nu\,d\xi,\int_a^y\int_{t_0}^T u(\xi,\nu)\,d\nu\,d\xi\right\rangle+$$

$$\left.+\left\langle C'_y(T,b,t_0,y)\int_{t_0}^T\int_y^b u(\xi,\nu)\,d\nu\,d\xi,\int_{t_0}^T\int_y^b u(\xi,\nu)\,d\nu\,d\xi\right\rangle\right\}dy+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s\int_a^y\left\{L\left(s,y,\tau,z,\int_a^y u(s,\nu)\,d\nu,\int_{t_0}^s u(\xi,y)\,d\xi,\int_\tau^s u(\xi,y)\,d\xi,\int_z^y u(s,\nu)\,d\nu\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{(s-t_0)(y-a)}\left[\left\langle P'_y(s,b,y)\int_y^b u(s,\nu)\,d\nu,\int_y^b u(s,\nu)\,d\nu\right\rangle+\right.$$

$$+\left\langle H'_s(T,y,s)\int_s^T u(\xi,y)\,d\xi,\int_s^T u(\xi,y)\,d\xi\right\rangle+$$

$$+\left\langle C''_{sy}(s,y,t_0,a)\int_{t_0}^s\int_a^y u(\xi,\nu)\,d\nu\,d\xi,\int_{t_0}^s\int_a^y u(\xi,\nu)\,d\nu\,d\xi\right\rangle-$$

$$-\left\langle C''_{sy}(T,y,s,t_0)\int_s^T\int_a^y u(\xi,\nu)\,d\nu\,d\xi,\int_s^T\int_a^y u(\xi,\nu)\,d\nu\,d\xi\right\rangle-$$

$$-\left\langle C''_{ys}(s,b,t_0,y)\int_{t_0}^s\int_y^b u(\xi,\nu)\,d\nu\,d\xi,\int_{t_0}^s\int_y^b u(\xi,\nu)\,d\nu\,d\xi\right\rangle+$$

$$\left.+\left\langle C''_{sy}(T,b,s,y)\int_s^T\int_y^b u(\xi,\nu)\,d\nu\,d\xi,\int_s^T\int_y^b u(\xi,\nu)\,d\nu\,d\xi\right\rangle\right]+$$

$$+\frac{1}{y-a}\left[\left\langle C'''_{\tau sy}(s,y,\tau,a)\int_\tau^s\int_a^y u(\xi,\nu)\,d\nu\,d\xi,\int_\tau^s\int_a^y u(\xi,\nu)\,d\nu\,d\xi\right\rangle-\right.$$

$$\left.-\left\langle C'''_{\tau ys}(s,b,\tau,y)\int_\tau^s\int_y^b u(\xi,\nu)\,d\nu\,d\xi,\int_\tau^s\int_y^b u(\xi,\nu)\,d\nu\,d\xi\right\rangle\right]+$$

$$+\frac{1}{s-t_0}\left[\left\langle C'''_{zsy}(s,y,t_0,z)\int_{t_0}^{s}\int_{z}^{y}u(\xi,\nu)d\nu d\xi,\int_{t_0}^{s}\int_{z}^{y}u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right\rangle-\right.$$

$$\left.-\left\langle C'''_{szy}(T,y,s,z)\int_{s}^{T}\int_{z}^{y}u(\xi,\nu)d\nu d\xi,\int_{s}^{T}\int_{z}^{y}u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right\rangle\right]+$$

$$\left.+\left\langle C^{(IV)}_{\tau zsy}(s,y,\tau,z)\int_{\tau}^{s}\int_{z}^{y}u(\xi,\nu)d\nu d\xi,\int_{\tau}^{s}\int_{z}^{y}u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right\rangle\right\}dzd\tau dsdy-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s}\left\langle C''_{\tau s}(s,b,\tau,a)\int_{\tau}^{s}\int_{a}^{b}u(\xi,\nu)d\nu d\xi,\int_{\tau}^{s}\int_{a}^{b}u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right\rangle d\tau ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\int_{a}^{y}\left\langle C''_{zy}(T,y,t_0,z)\int_{t_0}^{T}\int_{z}^{y}u(\xi,\nu)d\nu d\xi,\int_{t_0}^{T}\int_{z}^{y}u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right\rangle dzdy=$$

$$=\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}\langle f(s,y),u(s,y)\rangle dsdy. \qquad (13)$$

Пусть $f(t,x)=0,\ \ (t,x)\in G.$ Тогда учитывая условия (1–6) из (13), имеем $\int_{t_0}^{s}u(\xi,y)d\xi=0,\ \forall(s,y)\in G$ или $\int_{a}^{y}u(s,\nu)d\nu=0,\ \forall(s,y)\in G.$ Отсюда $u(t,x)=0$ при всех $(t,x)\in G.$

Это значит – однородная система, соответствующая системе (1), имеет только тривиальное решение. Теорема доказана.

Литература

1. *Магницкий Н.А.* Линейные интегральные уравнения Вольтерра первого и третьего рода / Н.А. Магницкий // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1979. Т. 19. № 4. С. 970–989.
2. *Лаврентьев М.М.* Об интегральных уравнениях первого рода / М.М. Лаврентьев // ДАН СССР. 1959. Т. 127. № 1. С. 31–33.
3. *Лаврентьев М.М.* Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. М.: Наука, 1980. 286 с.
4. *Иманалиев М.И.* О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода / М.И. Иманалиев, А. Асанов // ДАН. 2007. Т. 415. № 1. С. 14–17.
5. *Асанов А.* О единственности решения операторных уравнений Вольтерра / А. Асанов // Известия АН Киргизской ССР. 1988. № 1. С. 13–18.
6. *Асанов А.* Регуляризация и устойчивость систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода / А. Асанов, З.А. Каденова // Вестник СамГТУ. Серия физ.-матем. науки. Самара: СамГТУ. 2005. № 38. С. 11–14.
7. *Денисов А.М., Коровин С.В.* // Вестник МГУ. Вычислительная математика и кибернетика. 1992. № 3. С. 22–28.
8. *Aparstyn A.S.* Nonclassical linear Volterra Equations of the First Kind. Utrecht: VSP, 2003. 168 p.
9. *Asanov A.* Regularization, Uniqueness and Existence of Solutions of Volterra Equations of the First Kind. Utrecht: VSP, 1998. 276 p.
10. *Bukhgeim A.L.* Volterra Equations and Inverse Problems. Utrecht: VSP, 1999. 204 p.