

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕПЛООВОГО ПРОЦЕССА, ОПИСЫВАЕМОГО ВОЛЬТЕРРОВО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ

А.К. Керимбеков, Б.Ж. Кулбаева

Проведено исследование задачи нелинейного оптимального управления тепловыми процессами, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями. Установлены достаточные условия однозначной разрешимости задачи оптимизации.

Ключевые слова: краевая задача; обобщенное решение; функционал; оптимальное управление; нелинейное интегро-дифференциальное уравнение.

I. Краевая задача управляемого процесса. Рассмотрим управляемый тепловой процесс $v(t, x)$ $(t, x) \in Q = \{0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$, описываемый краевой задачей

$$v_t = v_{xx} + \lambda \int_0^t K(t, \tau) v(\tau, x) d\tau + g(t, x) f[t, u(t)],$$

$$0 < x < 1, 0 < t \leq T, \tag{1.1}$$

$$v(0, x) = \psi(x), 0 < x < 1, \tag{1.2}$$

$$v_x(t, 0) = 0, v_x(t, 1) + av(t, 1) = 0, 0 < t \leq T, \tag{1.3}$$

где $g(t, x) \in H(Q)$, $\psi(x) \in H(0, 1)$, $f[t, u(t)] \in H(0, T)$ – заданные функции, причем функция $f[t, u(t)]$ нелинейно зависит от функции управления $u(t) \in H(0, T)$ и по функциональной переменной $u(t)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial f[t, u(t)]}{\partial u} \neq 0, \forall t \in [0, T]; \tag{1.4}$$

ядро $K(t, \tau)$ – известная ограниченная функция, т. е.

$$K_0 = \sup_{(t, \tau) \in D} |K(t, \tau)|; \tag{1.5}$$

λ – параметр, постоянная $\alpha > 0$, T – фиксированный момент времени; $H(Y)$ – гильбертово пространство функций, определенных на множестве Y .

При решении задачи управления будем пользоваться слабо обобщенным решением краевой задачи (1.1)–(1.3). Под этим решением понимается функция $v(t, x) \in H(Q)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^1 (v\phi)_t^2 dx = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 \left[(\phi_t + \phi_{xx})v(t, x) + \left(\lambda \int_0^t K(t, \tau)v(\tau, x) d\tau + g(t, x)f[t, u(t)] \right) \right] dx dt + \\ + \int_{t_1}^{t_2} \left[\phi_x(t, 0)v(t, 0) - (\phi_x(t, 1) + \alpha\phi(t, 1))v(t, 1) \right] dt$$

при любых t_1, t_2 ($0 \leq t_1 < t_2 \leq T$), и для любой функции $\phi(t, x) \in C^{1,2}(Q)$, а начальному и граничным условиям – в слабом смысле.

Решение краевой задачи (1.1)–(1.3) имеет вид

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)z_n(x), \tag{1.6}$$

где функции

$$z_n(x) = \sqrt{\frac{2(\lambda_n^2 + \alpha^2)}{\lambda_n^2 + \alpha^2 + \alpha}} \cos \lambda_n x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

образуют полную ортонормированную систему собственных функций в пространстве $H(0,1)$, а соответствующие собственные значения λ_n удовлетворяет условиям

$$\lambda_n \leq \lambda_{n+1}, \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty, (n-1)\pi < \lambda_n < \frac{\pi}{2}(2n-1); \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{1.7}$$

Согласно методике работы [1], коэффициенты Фурье $v_n(t)$ при каждом фиксированном $n = 1, 2, 3, \dots$ определяются как решение линейного неоднородного интегрального уравнения Вольтерра 2-рода вида

$$v_n(t) = \lambda \int_0^t K_n(t, s) v_n(s) ds + a_n(t) \tag{1.8}$$

с ядром

$$K_n(t, s) = \int_s^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} K(\tau, s) d\tau$$

и свободным членом

$$a_n(t) = e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} g_n(\tau) f[\tau, u(\tau)] d\tau.$$

Резольвенту ядра $K_n(t, s)$ находим в виде ряда Неймана

$$R_n(t, s, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{n,i}(t, s), \tag{1.9}$$

где итерированные ядра $K_{n,i}(t, s)$ определяются по формуле [2]:

$$K_{n,i+1}(t, s) = \int_s^t K_n(t, \tau) K_{n,i}(\tau, s) d\tau, \quad K_{n,1}(t, s) \equiv K_n(t, s) \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Нетрудно показать, что, согласно (1.5), ряд Неймана (1.9) абсолютно сходится при любом значении параметра λ и для резольвенты имеет место неравенство

$$|R_n(t, s, \lambda)| \leq \frac{K_0}{\lambda_n^2} e^{\frac{|\lambda|K_0(t-s)}{\lambda_n^2}} \leq \frac{K_0}{\lambda_n^2} e^{\frac{|\lambda|K_0 T}{\lambda_n^2}}. \tag{1.10}$$

Решение интегрального уравнения (1.8) находим по формуле [2]:

$$v_n(t) = \lambda \int_0^t R_n(t, s, \lambda) a_n(s) ds + a_n(t) = \psi_n \left[e^{-\lambda_n^2 t} + \lambda \int_0^t R_n(t, s, \lambda) e^{-\lambda_n^2 s} ds \right] +$$

$$+ \int_0^t g_n(\tau) f[\tau, u(\tau)] \left(e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} + \lambda \int_\tau^t R_n(t, s, \lambda) e^{-\lambda_n^2(s-\tau)} ds \right) d\tau, \quad (1.11)$$

где $\psi_n, g_n(t)$ – коэффициенты Фурье соответственно функций $\psi(x)$ и $g(t, x)$.

Согласно (1.5), (1.10) и свойствам заданных функций, нетрудно проверить, что функция $v(t, x)$, определяемая по формулам (1.6) и (1.11), является элементом пространства $H(Q)$.

Заметим, что, согласно (1.4), каждому управлению $u(t) \in H(0, T)$ соответствует единственная функция $v(t, x)$.

II. *Постановка задачи оптимального управления и условия оптимальности.* Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J[u(t)] = \int_0^1 [v(T, x) - \xi(x)]^2 dx + 2\beta \int_0^T |u(t)| dt, \quad \beta > 0, \quad (2.1)$$

где $v(t, x)$ – решение краевой задачи (1.1)–(1.3), $\xi(x) \in H(0, 1)$ – заданная функция, т. е. нужно найти такое управление $u^0(t) \in H(0, T)$, которое вместе с соответствующим ему решением $v^0(t, x)$ краевой задачи (1.1)–(1.3) минимизирует функционал (2.1). Такое управление $u^0(t)$ называется оптимальным, а $v^0(t, x)$ – оптимальным процессом.

Согласно методике вывода принципа максимума для распределенных систем [3], нетрудно показать, что оптимальное управление $u^0(t)$ удовлетворяет соотношениям

$$2\beta \text{sign } u(t) = \int_0^1 g(t, x) \omega(t, x) dx f_u[t, u(t)], \quad (2.2)$$

$$f_u^{-1}[t, u(t)] f_{uu}[t, u(t)] \text{sign } u(t) > 0, \quad (2.3)$$

где $\omega(t, s)$ является решением сопряженной краевой задачи

$$\omega_t + \omega_{xx} + \lambda \int_t^T K(\tau, t) \omega(\tau, x) d\tau = 0, \quad (t, x) \in Q,$$

$$\omega(T, x) + 2[v(T, x) - \xi(x)] = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$\omega_x(t, 0) = 0, \quad \omega_x(t, 1) + \alpha \omega(t, 1) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad (2.4)$$

а $v(t, x)$ – решение краевой задачи (1.1)–(1.3). Условия (2.2) и (2.3), которые выполняются на оптимальном управлении одновременно, называются *условиями оптимальности*.

III. *Решение сопряженной краевой задачи.*

Решение сопряженной краевой задачи (2.4) ищем в виде

$$\omega(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(t) z_n(x). \quad (3.1)$$

Легко показать, что коэффициенты Фурье $\omega_n(t)$ при каждом фиксированном $n = 1, 2, 3, \dots$ определяются как решение линейного интегрального уравнения

$$\omega_n(t) = \lambda \int_0^T B_n(s, t) \omega_n(s) ds - 2[v_n(T) - \xi_n] e^{-\lambda_n^2(t-T)}, \quad (3.2)$$

где ядро

$$B_n(s, t) = \int_t^T e^{-\lambda_n^2(\tau-t)} K(s, \tau) d\tau; \quad (3.3)$$

$v_n(t), \xi_n$ – коэффициенты Фурье соответственно функций $v(t, x)$ и $\xi(x)$. Резольвенту ядра $B_n(s, t)$ находим в виде ряда Неймана

$$L_n(t, s, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} B_{n,i}(t, s), \quad (3.4)$$

где

$$B_{n,i+1}(t, s) = \int_t^s B_n(t, \tau) B_{n,i}(\tau, s) d\tau, \quad B_n(t, s) = B_{n,1}(t, s), \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

итерированные (повторные) ядра. Нетрудно проверить, что они удовлетворяют следующим оценкам:

$$|B_{n,i}(t, s)| \leq \left(\frac{K_0}{\lambda_n^2} \right)^i \frac{(s-t)^{i-1}}{(i-1)!}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.5)$$

Согласно (3.5), для резольвенты имеет место оценка

$$|L_n(t, s, \lambda)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|^{i-1} |B_{n,i}(t, s)| \leq \frac{K_0}{\lambda_n^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i-1)!} \left(\frac{|\lambda| K_0 (s-t)}{\lambda_n^2} \right)^{i-1} = \frac{K_0}{\lambda_n^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 (s-t)}{\lambda_n^2}} \leq \frac{K_0}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_n^2}}, \quad (3.6)$$

т. е. ряд Неймана сходится равномерно для любого значения λ .

Решение интегрального уравнения (3.2) находим по формуле

$$\omega_n(t) = -2\lambda \int_0^T L_n(s, t, \lambda) [v_n(T) - \xi_n] e^{-\lambda_n^2(T-s)} ds - 2[v_n(T) - \xi_n] e^{-\lambda_n^2(T-t)}. \quad (3.7)$$

Подставляя (3.7) в (3.1) находим решение сопряженной краевой задачи (2.4).

IV. *Нелинейное интегральное уравнение оптимального управления.* Оптимальное управление находим согласно условиям оптимальности (2.2) и (2.3). Поскольку

$$\int_0^1 g(t, x) \omega(t, x) dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) z_n(x) \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k(t) z_k(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \omega_n(t) = -2[v_n(T) - \xi_n] \left(e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda \int_t^T h_n(s, t, \lambda) e^{-\lambda_n^2(T-s)} ds \right),$$

то с учетом (1.11), согласно (2.2), получим следующее нелинейное интегральное уравнение:

$$\beta f_u^{-1}[t, u(t)] \text{sign } u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n^0(t, \lambda) \left[h_n - \int_0^T G_n(\tau, \lambda) f[\tau, u(\tau)] d\tau \right], \quad (4.1)$$

где

$$h_n = \xi_n - \psi_n \left(e^{-\lambda_n^2 T} + \lambda \int_0^T R_n(T, \tau, \lambda) e^{-\lambda_n^2 s} ds \right); \quad (4.2)$$

$$G_n(t, \lambda) = g_n(t) \left(e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda \int_t^T R_n(T, \tau, \lambda) e^{-\lambda_n^2(s-\tau)} ds \right); \quad (4.3)$$

$$G_n^0(t, \lambda) = g_n(t) \left(e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda \int_t^T L_n(t, s, \lambda) e^{-\lambda_n^2(T-s)} ds \right). \quad (4.4)$$

Уравнение (4.1) следует решать с учетом и второго условия оптимальности (2.3), ибо оптимальное управление $u^0(t)$ должно удовлетворять условиям оптимальности (2.2) и (2.3) одновременно. Поскольку функция $f[t, u(t)]$ задается, то в зависимости от знака соотношения $f_u^{-1}[t, u(t)] f_{uu}[t, u(t)]$, согласно (2.3), относительно оптимального управления имеет место одно из следующих условий:

$$u(t) > 0 \text{ если } f_u^{-1}[t, u] f_{uu}[t, u] > 0, \quad (4.5)$$

$$u(t) < 0 \text{ если } f_u^{-1}[t, u] f_{uu}[t, u] < 0. \quad (4.6)$$

Известно, что решение интегрального уравнения Фредгольма не обладает свойством продолжаемости, т. е. решение строится для области (интервала) в целом.

Поэтому оптимальное управление $u^0(t)$ является решением интегрального уравнения (4.1) определенного знака.

Пусть выполняется условие (4.5). В этом случае оптимальное управление $u^0(t)$ определяется как решение нелинейного интегрального уравнения

$$\beta f_u^{-1}[t, u(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} G_n^0(t, \lambda) \left[h_n - \int_0^T G_n(\tau, \lambda) f[\tau, u(\tau)] d\tau \right]. \quad (4.7)$$

только положительного знака.

Для построения решения уравнения (4.7), согласно методике, разработанный проф. А. Керимбековым [4], положим

$$\beta f_u^{-1}[t, u(t)] = p(t). \quad (4.8)$$

Лемма 4.1. Функция $p(t)$ является элементом пространства функций суммируемых с m -й степенью,

т. е. $p(t) \in L_2^m(0, T)$, $1 \leq m < \infty$.

Доказательство. Согласно условию (1.4), имеет место оценка

$$\sup_{t \in [0, T]} f^{-1}[t, u(t)] = M > 0. \quad (4.9)$$

Поэтому утверждение леммы следует из неравенства

$$\int_0^T |p(t)|^m dt \leq \beta^m \int_0^T |f^{-1}[t, u(t)]|^m dt \leq (\beta M)^m T < \infty.$$

Согласно условию (1.4), из равенства (4.8) функция определяется $u(t)$ однозначно, т. е. существует функция $\varphi(\cdot)$, такая, что имеет место равенство

$$u(t) = \varphi [t, p(t), \beta]. \tag{4.10}$$

Лемма 4.2. Пусть $p(t) \in H(0, T), f[t, u(t)] \in H(0, T), \forall u(t) \in H(0, T)$. Тогда оператор

$$G[p(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} G_n^0(t, \lambda) \left[h_n - \int_0^T G_n(\tau, \lambda) f[\tau, u(\tau)] d\tau \right] \tag{4.11}$$

отображает пространство $H(0, T)$ в себя.

Доказательство. С учетом равенств (4.2)–(4.4) непосредственным вычислением получим неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^T G^2[p(t)] dt &= \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} G_n^0(t, \lambda) \left[h_n - \int_0^T G_n(\tau, \lambda) f[\tau, u(\tau)] d\tau \right] \right)^2 dt \leq \\ &\leq \int_0^T (G_n^0(t, \lambda))^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[h_n - \int_0^T G_n(\tau, \lambda) f[\tau, u(\tau)] d\tau \right]^2 dt \leq \\ &\leq 2 \|g(t, x)\|_H^2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left[1 + \left(\frac{\lambda K_0 T}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right)^2 \right] \{ 2(\|\xi(x)\|_H^2 + B_0 \|\psi(x)\|_H^2) + \\ &+ \|g(t, x)\|_H^2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left[1 + \left(\frac{\lambda K_0 T}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right)^2 \right] \|f[t, u(t)]\|_H^2 \} < \infty, \end{aligned}$$

из которого следует утверждение леммы. Здесь $B_0 = 2 \left[1 + \left(\frac{\lambda K_0 T}{2\lambda_1^2} e^{\frac{2|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \cdot \frac{1}{2\lambda_1^2} \right)^2 \right]$.

Лемма 4.3. Пусть каждая из функций $f[t, u(t)]$ и $\varphi[t, P(t), \beta]$ по функциональному аргументу удовлетворяет условию Липшица:

$$\|f[t, u(t)] - f[t, \bar{u}(t)]\|_H \leq f_0 \|u(t) - \bar{u}(t)\|_H, f_0 > 0, \tag{4.12}$$

$$\|\varphi[t, p(t), \beta] - \varphi[t, \bar{p}(t), \beta]\|_H \leq \varphi_0(\beta) \|p(t) - \bar{p}(t)\|_H, \varphi_0(\beta) > 0. \tag{4.13}$$

Тогда при выполнении условия

$$\gamma = \|g(t, x)\|_H^2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left[1 + \left(\frac{\lambda K_0 T}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right)^2 \right] f_0 \varphi_0(\beta) < 1, \tag{4.14}$$

оператор $G[p]$, действующий по формуле (4.11), является сжимающим.

Доказательство. Непосредственным вычислением имеем неравенство

$$\begin{aligned} \|G[p] - G[\bar{p}]\|_H^2 &= \int_0^T (G[p] - G[\bar{p}])^2 dt = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} (G_n^0(t, \lambda))^2 \int_0^T G_n^2(\tau, \lambda) d\tau \int_0^T (f[\tau, u(\tau)] - f[\tau, \bar{u}(\tau)])^2 d\tau dt \leq \\ &\leq \left[\|g(t, x)\|_H^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \left(1 + \left[\frac{\lambda K_0 T}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right]^2 \right) \right]^2 \|f[\tau, u(\tau)] - f[\tau, \bar{u}(\tau)]\|_H^2 \leq \\ &\leq \left[\|g(t, x)\|_H^2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left(1 + \left[\frac{\lambda K_0 T}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right]^2 \right) \right]^2 f_0^2 \varphi_0^2(\beta) \|p(t) - \bar{p}(t)\|_H^2, \end{aligned}$$

из которого следует утверждение леммы.

Теорема 4.1. Пусть выполнены условия (1.4), (1.5), (4.12)–(4.14). Тогда операторное уравнение $p(t) = G[p(t)]$ в пространстве $H(0, T)$ имеет единственное решение.

Доказательство. Согласно Леммам 4.1 и 4.3 операторное уравнение можно рассматривать в пространстве $H(0, T)$. Согласно Лемме 4.3 оператор $G(p)$ является сжимающим. Поскольку гильбертово пространство $H(0, T)$ является полным метрическим пространством, то согласно теореме [5] о принципе сжимающих отображений оператор $G(p)$ имеет единственную неподвижную точку, т.е. операторное уравнение имеет единственное решение.

Решение операторного уравнения может быть найдено методом последовательных приближений, т.е. n -е приближение решения находится по формуле $p_n(t) = G[p_{n-1}(t)]$, $n = 1, 2, 3, \dots$, где $p_0(t)$ произвольный элемент пространства $H(0, T)$, причем имеет место оценка

$$\|p(t) - p_k(t)\|_H \leq \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \|G[p_0(t)] - p_0(t)\|_H. \quad (4.15)$$

Точное решение $p^0(t)$ может быть найдено как предел приближенных решений, т.е. $p_0(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} p_k(t)$. Это решение подставляя в (4.10) находим искомое оптимальное управление

$$u^0(t) = \varphi[t, p^0(t), \beta]. \quad (4.16)$$

Оптимальный процесс $v^0(t, x)$, т.е. решение краевой задачи (1.1)–(1.4), соответствующее оптимальному управлению $u^0(t)$, согласно (1.6), (1.11) находим по формуле

$$v^0(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\psi_n \left(e^{-\lambda_n^2 t} + \lambda \int_0^t R_n(t, s, \lambda) e^{-\lambda_n^2 s} ds \right) + \int_0^T g_n(\tau) \left(e^{-\lambda_n^2 (t-\tau)} + \lambda \int_{\tau}^T R_n(t, s, \lambda) e^{-\lambda_n^2 (s-\tau)} ds \right) f[\tau, u^0(\tau)] d\tau \right] z_n(x). \quad (4.17)$$

Минимальное значение функционала (2.1) вычислим по формуле:

$$J[u^0] = \int_0^1 \left[v^0(T, x) - \xi(x) \right]^2 dx + 2\beta \int_0^T |u^0(t)| dt. \quad (4.18)$$

Найденная тройка $(u^0(t), v^0(t, x), J[u^0(t)])$ является решением задачи нелинейной оптимизации.

Литература

1. Плотников В.И. Энергетическое неравенство и свойство переопределенности системы собственных функций / В.И. Плотников // Изв. АН СССР. Сер.мат. 1968. Т. 32. № 4. С. 743–755.
2. Краснов М.В. Интегральные уравнения / М.В. Краснов. М.: Наука, 1975. 303 с.
3. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А.И. Егоров М.: Наука, 1978. 500 с.
4. Керимбеков А.К. Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами: дис... д-ра физ.-мат. наук / А.К. Керимбеков; Ин-т математики НАН КР. Бишкек, 2003. 224 с.
5. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. М.: Наука, 1965. 520 с.