УДК 517.97

О ВЛИЯНИИ ПАРАМЕТРОВ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ НА СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ

А. Керимбеков, Р.Ж. Наметкулова

Исследовано влияние параметра теплового обмена на скорость сходимости приближений оптимального управления и оптимального процесса в задаче оптимального управления тепловым процессом, описываемым фредгольмовым интегро-дифференциальным уравнением. Результаты приведены в виде численных таблиц.

Ключевые слова: функционал; оптимальное управление; приближенное решение; сходимость.

ЖЫЛУУЛУК ПРОЦЕССИН ОПТИМАЛДУУ БАШКАРУУ МАСЕЛЕСИНИН ПАРАМЕТРЛЕРИНИН ЖАКЫНДАШТЫРЫЛГАН ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН ОКШОШТУК ЫЛДАМДЫГЫНА ТИЙГИЗГЕН ТААСИРИ

А. Керимбеков, Р.Ж. Наметкулова

Бул макалада фредгольмовдук интегралдык-дифференциалдык теңдеме менен мүнөздөлүүчү жылуулук процессин оптималдуу башкаруу маселесинде жылуулуктун алмашуусун мүнөздөгөн параметрдин оптималдуу башкаруу менен оптималдуу процесстин окшоштук ылдамдыгына тийгизген таасири изилденген. Алынган жыйынтыктар таблица түрүндө берилген.

Түйүндүү сөздөр: функционал; оптималдуу башкаруу; жакындаштырылган чыгарылыш; окшоштук.

ABOUT INFLUENCING PARAMETERS OF THE TASK OPTIMAL CONTROL OF THERMAL PROCESSES ON THE SPEED OF APPROXIMATE SOLUTIONS CONVERGENCE

A. Kerimbekov, R.J. Nametkulova

The article researches the influence of the thermal exchange parameter on the rate of convergence of approximations of the optimal control and optimal process in the problem optimal control of the thermal process described by the Fredholm integro-differential equation. The results are presented in the form of numerical tables.

Keywords: functional; optimal control; approximate solution; convergence.

В статье исследованы вопросы сходимости приближенных решений одной задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов, описываемых интегро-дифференциальным уравнением с оператором Фредгольма. Основные теоретические результаты и выводы, полученные при решении задачи нелинейной оптимизации с равномерно-распределенным управлением, подробно приведены в работе [1].

Здесь мы основное внимание уделяем вопросу влияния числовых параметров задачи на скорость сходимости приближенных решений. Отметим, что наличие интегрального оператора Фредгольма в уравнении существенно влияет на процедуру построения приближенных решений. В этом случае следует различать приближения по резольвенте, приближения по оптимальному управлению и конечномерные приближения. Это обстоятельство существенно влияет на скорость сходимости конечномерного приближения к точному решению по оптимальному процессу. Кроме этого, скорость сходимости приближений зависит от числовых параметров задачи. В работе показана степень влияния коэффициента теплового обмена α на скорость сходимости и результаты приведены в виде числовых таблиц.

Постановка нелинейно-квадратичной задачи оптимизации с равномерно распределенным управлением. Рассмотрим задачу нахождения минимального значения функционала:

$$J[u(t)] = \int_0^1 \left[v(T,x) - \xi(x) \right]^2 dx + \beta \int_0^T q^2\left(t, u(t)\right) dt, \quad \beta > 0, \tag{1}$$

где функция $v(t,x)$ является решением краевой задачи

$$v_t = v_{xx} + \lambda \int_0^T K\left(t,\tau\right) v\left(\tau,x\right) d\tau + g\left(t,x\right) f[t,u\left(t\right)], \tag{2}$$

$$v\left(0,x\right) = \psi\left(x\right), \quad 0 < x < 1, \tag{3}$$

$$v_x\left(t,0\right) = 0, \quad v_x\left(t,1\right) + \alpha v\left(t,1\right) = 0, \quad 0 < t \le T, \tag{4}$$

$u(t) \in H(0,T)$ – функция управления; $H(Y)$ – пространство Гильберта квадратично суммируемых функций, определенных на множестве Y.

Решение краевой задачи управляемого процесса ищем в виде [1]:

$$v\left(t,x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n\left(t\right) z_n\left(x\right), \tag{5}$$

где коэффициенты Фурье $v_n\left(t\right)$ определяются по формулам:

$$v_n\left(t\right) = \lambda \int_0^T R_n\left(t,s,\lambda\right) a_n\left(s\right) ds + a_n\left(t\right), \; n = 1,2,3,...$$

$$a_n\left(t\right) = e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2 (t-\tau)} g_n\left(\tau\right) f\left[\tau, u\left(\tau\right)\right] d\tau,$$

$R_n\left(t,s,\lambda\right)$ – резольвента ядра $K_n\left(t,s\right) = \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} K\left(\tau,s\right) d\tau$, для которой справедливо неравенство

$$\int_0^T R_n^2\left(t,s,\lambda\right) ds \le \frac{K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T}\right)^2}.$$

В приложениях вместо понятия классического решения краевой задачи (2)–(4) удобно пользоваться обобщенным решением. В работе [1] доказано, что краевая задача (2)–(4) имеет обобщенное решение, являющееся элементом гильбертова пространства $H(Q)$ квадратично суммируемых функций, где $Q = (0,1) \times (0,'')$.

Отметим, что здесь приняты обозначения работы [1].

Численное решение проделано при следующих данных:

1. $T = 2;$
2. $\xi(x) = 1 - x^2;$
3. $\beta = 0,5;$
   $q(t,u(t)) = e^{-u^2(t)}, \; q_u(t,u(t)) = -2u(t)e^{-u^2(t)},$
4. $q(t,u(t))q_u(t,u(t)) = -2u(t)e^{-2u^2(t)}, 1 \le u(t) \le 2,$
   $q_0 = \max\left|q_u(t,u(t))\right| \le 2e^{-1} \approx 0{,}735759;$
5. $g(t,x) = 0.04 * (x^2 + t);$

6. $\psi(x) = x^2$;
7. $\alpha = 0,25;\ \alpha = 0,75; \alpha = 1,25$;
8. $f(t,u(t)) = u(t)e^{-2u^2(t)},\ f_u(t,u(t)) = e^{-2u^2(t)}\left(-4u^2(t)+1\right),$
$f_0 = \max\left|f_u(t,u(t))\right| \le \frac{3}{e^2} \le 0,41;$
9. $f_u\left(t,u(t)\right)\left(\frac{q\left(t,u(t)\right)q_u\left(t,u(t)\right)}{f_u\left(t,u(t)\right)}\right)_u = e^{-2u^2(t)}\frac{2\left[1+8u^2(t)\right]}{4u^2(t)-1} > 0,\ 1 < u(t) < 2;$
10. $\beta\frac{q\left(t,u(t)\right)q_u\left(t,u(t)\right)}{f_u\left(t,u(t)\right)} = \beta\frac{-2u(t)e^{-2u^2(t)}}{e^{-2u^2(t)}\left(-4u^2(t)+1\right)} = \beta\frac{2u(t)}{4u^2(t)-1} = p(t),$
$\frac{4}{15}\beta < p(t) < \frac{2}{3}\beta.$

Установлено, что оптимальное управление однозначно определяется по формуле:

$$u(t) = \varphi\left(t, p(t), \beta\right) = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4p^2(t)}}{4p(t)} \tag{6}$$

и имеет место равенство

$$\varphi_0(\beta) = \max\left|\varphi_0\left[t, p(t), \beta\right]\right| = \frac{\beta}{4p^2(t)}\left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + 4p^2(t)}}\right)\Bigg|_{p(t)=\frac{4}{15}\beta} = \frac{225}{35\beta} = 13,235294,$$

при $\beta = 0,5$.

11. Согласно теоретическим результатам [1] для построения оптимального управления сначала нужно решить операторное уравнение

$$p(t) = G[p(t)] + h(t) \tag{7}$$

в гильбертовом пространстве $H(0,T)$ квадратично суммируемых функций, определенных в интервале $(0,T)$.

Построить точное решение операторного уравнения не всегда удается. Поэтому, методом последовательных приближений строится приближение точного решения по формуле:

$$p_i(t) = G[p_{i-1}(t)] + h(t), \quad i = 1,2,3,... \quad p_0(t) = h(t).$$

Сходимость приближений операторного уравнения. В работе [1] показано, что для приближенного решения $p_i(t)$ справедливы оценки:

$$\| p^0(t) - p_i(t) \|_{H(0,T)} \le \frac{\gamma^i}{1-\gamma} \| G[h(t)] \|_{H(0,T)}, \quad i = 1,2,3,...$$

Численные расчеты приведены в таблице 1.

Столбцевые значения таблицы 1 показывают сходимость приближений при фиксированных значениях коэффициента теплообмена α, а также скорость сходимости. Например, по значениям первого столбца, пятое приближение обеспечивает точность ε = 0,001, по значениям второго столбца эта точность обеспечивается на четвертом приближении.

По строчным значениям таблицы нетрудно увидеть, что с ростом значения коэффициента теплообмена α скорость сходимости увеличивается.

Таблица 1

	$\| p\ (t) - p_i(t) \|_{H(0,T)} \le \frac{\gamma_0^i}{1-\gamma} \| G[h(t)] \|_{H(0,T)}$		
i	α = 0,25	α = 0,75	α = 1,25
1	0.0168	0.0103	0.0099
2	0.0070	0.0034	0.0032
3	0.0029	0.0011	0.0010
4	0.0012	3.7058e-04	3.2717e-04
5	5.0230e-04	1.2221e-04	1.0487e-04
6	2.0893e-04	4.0301e-05	3.3617e-05
7	8.6907e-05	1.3290e-05	1.0776e-05

Приближения оптимального управления и их сходимость. В работе [1] показано, что k-е приближение оптимального управления определяется формулой:

$$u_k(t) = \varphi[t, p_k(t), \beta], \quad k = 1,2,3,...,$$

где φ имеет вид (6), а $p_k(t)$ – приближенное решение операторного уравнения (7). Сходимость приближений оптимального управления определяется согласно оценке

$$\left\| u^0(t) - u_k(t) \right\|_{H(0,T)} = \left\| \varphi[t, p^0(t), \beta] - \varphi[t, p_k(t), \beta] \right\|_{H(0,T)} \le \varphi_0(\beta) \left\| p^0(t) - p_k(t) \right\|_{H(0,T)}. \quad (8)$$

Численные расчеты приведены в таблице 2.

Таблица 2

	$\left\| u^0(t) - u_k(t) \right\|_{H(0,T)} \le \varphi_0(\beta) \left\| p^0(t) - p_k(t) \right\|_{H(0,T)}$		
s	α = 0,25	α = 0,75	α = 1,25
1	0.2221	0.1368	0.1315
2	0.0924	0.0451	0.0421
3	0.0384	0.0149	0.0135
4	0.0160	0.0049	0.0043
5	0.0066	0.0016	0.0014
6	0.0028	5.3339e-04	4.4493e-04
7	0.0012	1.7590e-04	1.4262e-04

Столбцевые значения таблицы 2 показывают сходимость приближений при фиксированных значениях коэффициента теплообмена α, а также скорость сходимости. Например, по значениям первого столбца пятое приближение обеспечивает точность ε = 0,01, по значениям второго столбца эта точность обеспечивается на четвертом приближении. По строчным значениям таблицы 2 нетрудно увидеть, что с ростом значения коэффициента теплообмена α скорость сходимости увеличивается.

Приближения оптимального процесса и функционала. При построении приближения оптимального процесса будем различать следующие виды приближений:

1) m-е приближение оптимального процесса по резольвенте:

$$v^m(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^0(t) + \lambda \int_0^T R_n^m(t,s,\lambda) a_n^0(s) ds \right) z_n(x),$$

$$a_n^0(t) = e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2 (t-\tau)} g_n(\tau) f\left[\tau, u^0(\tau)\right] d\tau;$$

2) m, k-е приближение оптимального процесса по резольвенте и управлению:

$$\nu_k^m(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^{(k)}(t)+\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)a_n^{(k)}(s)ds\right)z_n(x),$$

$$a_n^k(t)=e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}g_n(\tau)f\left[\tau,u_k(\tau)\right]d\tau;$$

3) m, k, r-е конечное приближение оптимального процесса по резольвенте и управлению:

$$\nu_k^{m,r}(t,x)=\sum_{n=1}^{r}\left(a_n^{(k)}(t)+\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)a_n^{(k)}(s)ds\right)z_n(x).$$

В соответствии с указанными приближениями оптимального процесса для минимального значения функционала будем различать следующие приближения:

1) m-е приближение функционала по резольвенте:

$$J_m[u^0(t)]=\int_0^1\left[\nu^m(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T q^2\left(t,u^0(t)\right)dt;$$

2) m, k-е приближение функционала по резольвенте и управлению:

$$J_m[u_k(t)]=\int_0^1\left[\nu_k^m(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T q^2\left(t,u_k(t)\right)dt;$$

3) $m,k,$ r конечное приближение функционала по резольвенте и управлению:

$$J_m^r[u_k(t)]=\int_0^1\left[\nu_k^{m,r}(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T q^2\left(t,u_k(t)\right)dt.$$

Приближения оптимального процесса и их сходимость

I. *Сходимость m-го приближения оптимального процесса по резольвенте.* В работе [1] показано, что m-е приближение оптимального процесса по резольвенте удовлетворяет оценке

$$\left\|\nu^0(t,x)-\nu^m(t,x)\right\|_{H(Q)}\le\sqrt{\overline{C}_1(\lambda)}\left(|\lambda|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_1^2}}\right)^m\xrightarrow[m\to\infty]{}0,$$

где

$$\overline{C}_1(\lambda)=\frac{\lambda^2K_0T}{2}\left(1-1\Big/\ln|\lambda|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_1^2}}\right)^2\left\{\|\psi(x)\|^2_{H(0,1)}+\|g(t,x)\|^2_{H(Q)}\left\|f\left(\tau,u^0(\tau)\right)\right\|^2_{H(0,T)}\right\}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\lambda_1^4}+\frac{1}{\pi^4}\frac{4}{3}\right).$$

Численные расчеты приведены в таблице 3.

Столбцевые значения таблицы 3 показывают сходимость приближений при фиксированных значениях коэффициента теплообмена α, а также скорость сходимости. Однако сравнение по строчным значениям таблицы показывает, что с ростом значения коэффициента теплообмена α сходимость замедляется. Например, точность ε = 0,2 достигается при α = 0,25 на третьем приближении, при α = 0,75 – на четвертом приближении, а при α = 1,25 – на шестом приближении.

Таблица 3

	$\left\| \nu^0(t,x) - \nu^m(t,x) \right\|_{H(Q)}$		
s	$\alpha = 0{,}25$	$\alpha = 0{,}75$	$\alpha = 1{,}25$
1	0.5457	0.7457	1.0016
2	0.2242	0.4723	0.6973
3	0.0921	0.2991	0.4854
4	0.0378	0.1894	0.3379
5	0.0155	0.1200	0.2352
6	0.0064	0.0760	0.1637
7	0.0026	0.0481	0.1140

II. *Сходимость m-го приближения оптимального процесса по резольвенте.* В работе [1] показано, что *m, k*-е приближение оптимального процесса по резольвенте удовлетворяет оценке

$$\left\| \nu^m(t,x) - \nu_k^m(t,x) \right\|_{H(Q)} \le \sqrt{\overline{C}_2(\lambda)} f_0 \left\| u^0(t) - u_k(t) \right\|_{H(0,T)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \quad \forall\ m = 1,2,3,...,$$

где

$$\overline{C}_2(\lambda) = T\left\| g(t,x) \right\|_{H(Q)}^2 \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T} \right)^2} \right) \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right).$$

Численные расчеты приведены в таблице 4.

Таблица 4

	$\left\| \nu^m(t,x) - \nu_k^m(t,x) \right\|_{H(Q)}$		
	$\alpha = 0{,}25$	$\alpha = 0{,}75$	$\alpha = 1{,}25$
1	0.0355	0.0195	0.0184
2	0.0148	0.0064	0.0059
3	0.0061	0.0021	0.0019
4	0.0026	6.9765e-04	6.0724e-04
5	0.0011	2.3007e-04	1.9465e-04
6	4.4176e-04	7.5869e-05	6.2396e-05
7	1.8375e-04	2.5019e-05	2.0001e-05

Столбцевые значения таблицы 4 показывают сходимость приближений при фиксированных значениях коэффициента теплообмена α, а также скорость сходимости. Например, по значениям первого столбца, третье приближение обеспечивает точность ε = 0,01, по значениям второго столбца эта точность обеспечивается на втором приближении.

По строчным значениям таблицы нетрудно увидеть, что с ростом значения коэффициента теплообмена α скорость сходимости увеличивается.

III. *Сходимость m, k, r-го конечного приближения.* В работе [1] показано, что *m, k, r*-е приближение оптимального процесса удовлетворяет оценке

$$\left\| \nu_k^m(t,x) - \nu_k^{m,r}(t,x) \right\|_{H(Q)} \le \sqrt{\overline{C}_3(\lambda)} \left(\sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \right)^{1/2} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 \qquad \forall\ m, k = 1,2,3,...,$$

где

$$\overline{C}_3(\lambda)=2\left(1+\frac{\lambda^2K_0T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\right)\left\{\|\psi(x)\|^2_{H(0,1)}+\|g(t,x)\|^2_{H(Q)}\left\|f^2\left(t,u_k(t)\right)\right\|^2_{H(0,T)}\right\}$$

Численные расчеты приведены в таблице 5.

Таблица 5

	$\left\|v_k^m(t,x)-v_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}$		
	α = 0,25	α = 0,75	α = 1,25
1	0.5613	0.8276	0.9799
2	0.3437	0.5068	0.6001
3	0.2646	0.3901	0.4619
4	0.2219	0.3271	0.3873
5	0.1944	0.2867	0.3394
6	0.1750	0.2580	0.3055
7	0.1604	0.2365	0.2800

Столбцевые значения таблицы 5 показывают сходимость приближений при фиксированных значениях коэффициента теплообмена α, а также скорость сходимости. Например, по значениям первого столбца, третье приближение обеспечивает точность ε = 0,3. Такая же точность обеспечивается при α = 0,75 – на пятом приближении, а при α = 1,25 – на седьмом приближении. Сравнение по строчным значениям таблицы показывает, что с ростом значения коэффициента теплообмена α скорость сходимости замедляется.

IV. *Сходимость m, k, r-го конечного приближения к оптимальному процессу.* В работе [1] показано, что *m, k, r*-е приближение к оптимальному процессу удовлетворяет оценке:

$$\left\|v^0(t,x)-v_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}\le\left\|v^0(t,x)-v^m(t,x)\right\|_{H(Q)}+$$

$$+\left\|v^m(t,x)-v_k^m(t,x)\right\|_{H(Q)}+\left\|v_k^m(t,x)-v_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}\xrightarrow[m,k,r\to\infty]{}0.$$

Численные расчеты приведены в таблице 6.

Таблица 6

	$\left\|v^0(t,x)-v_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}$		
	α = 0,25	α = 0,75	α = 1,25
1	1.1425	1.5928	2.0000
2	0.5827	0.9855	1.3032
3	0.3629	0.6914	0.9492
4	0.2623	0.5173	0.7258
5	0.2110	0.4069	0.5748
6	0.1818	0.3341	0.4693
7	0.1632	0.2846	0.3940

Столбцевые значения таблицы 6 показывают сходимость приближений при фиксированных значениях коэффициента теплообмена α, а также скорость сходимости. Например, по значениям первого столбца, третье приближение обеспечивает точность ε = 0,5. Такая же точность обеспечивается при $\alpha = 0{,}75$ – на пятом приближении, а при $\alpha = 1{,}25$– на шестом приближении. Сравнение по строчным значениям таблицы показывает, что с ростом значения коэффициента теплообмена α скорость сходимости увеличивается.

Выводы. Использованные оценки при составлении таблиц заимствованы из работ [1] или могут быть получены из результатов работы [2].

Сравнение столбцевых значений таблиц показывают сходимость приближений при фиксированных значениях коэффициента теплообмена α, а также скорость сходимости. При этом с ростом значений коэффициента теплообмена α для всех видов приближений как по столбцевым значениям, так и по строчным значениям таблиц, скорость сходимости увеличивается, кроме случая, когда рассматриваются приближения $\left\| v_k^m(t,x) - v_k^{m,r}(t,x) \right\|_{H(Q)} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$, где скорость сходимости замедляется.

Литература

1. *Наметкулова Р.Ж.* Приближенное решение задачи нелинейной оптимизации теплового процесса, описываемого фредгольмово интегро-дифференциальным уравнением / Р.Ж. Наметкулова // Вестник КРСУ. 2013. Т. 13. № 7. С. 23–27.
2. *Керимбеков А.* Приближенное решение задачи распределенного и граничного управления тепловым процессом / А. Керимбеков, Р.Ж. Наметкулова, А.К. Кадиримбетова // Известия ИГУ. 2016. Т. 16. Сер. “Математика”. С. 71–88.