УДК 517.962.2, 517.968.22

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА ДЕЙСТВИЙ ПО НЕРВНОМУ ВОЛОКНУ

А.Дж. Сатыбаев, Г.С. Курманалиева

Рассмотрена задача, возникающая при распространении потенциала действий по нервному волокну. При этом полученная задача параболического типа с помощью преобразования Лапласа приведена к задаче гиперболического типа. С использованием методов выпрямления характеристик и выделения особенностей обобщенная задача приведена к регулярной задаче. С помощью методов энергетических неравенств и Грануолла–Белмана доказана единственность решения последней регулярной задачи. Из эквивалентности задач следует, что и решение параболической задачи также единственно.

Ключевые слова: распространение потенциала; аксон; нервное волокно; двумерная, параболическая, прямая задача; гиперболическая задача; единственность решения.

НЕРВ ТАЛЧАЛАРЫНДА КЫЙМЫЛ-АРАКЕТТИН ПОТЕНЦИАЛЫНЫН ТАРКАЛЫШЫНЫН ЭКИ ӨЛЧӨМДҮҮ ТҮЗ МАСЕЛЕСИН ЧЫГАРУУНУН ЖАЛГЫЗДЫГЫ

А.Дж. Сатыбаев, Г.С. Курманалиева

Макалада нерв талчаларында кыймыл-аракеттин потенциалынын таркалышында келип чыккан маселе каралган. Бул учурда Лапласты өзгөртүү аркылуу алынган параболикалык типтеги маселе гиперболикалык маселеге келтирилген. Мүнөздөмөлөрдү түздөө жана өзгөчөлүктөрүн бөлүп көрсөтүү ыкмасын пайдалануу менен жалпылаштырылган маселе бир калыптагы маселеге келтирилген. Энергетикалык барабарсыздык жана Грануолла-Белмандын усулдарынын жардамы менен акыркы бир калыптагы маселенин чыгарылышынын жалгыздыгы далилденген. Маселенин эквиваленттүүлүгүнөн улам, параболикалык маселенин чыгарылышы да жалгыз деген тыянакка келебиз.

Түйүндүү сөздөр: потенциалдын таркалышы; аксон; нерв талчалары; экилик; параболикалык; түз маселе; гиперболикалык маселе; чыгаруунун жалгыздыгы.

THE UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF THE TWO-DIMENSIONAL DIRECT PROBLEM IS THE PROPAGATION OF THE ACTION POTENTIAL ALONG THE NERVE FIBER

A.J. Satybaev, G.S. Kurmanalieva

The paper considers the problem arising from the distribution of action potential along the nerve fiber. Moreover, the obtained problem of parabolic type with the help of the Laplace transform is reduced to a problem of hyperbolic type. Using the methods of rectifying characteristics and highlighting features, the generalized problem is reduced to a regular problem. Using the methods of energy inequalities and Granwall Belman, the uniqueness of the solution of the last regular problem is proved. From the equivalence of tasks, it follows that the solution of a parabolic problem is also unique.

Keywords: potential distribution; axon; nerve fiber; two-dimensional; parabolic; direct problem; hyperbolic problem; generalized; uniqueness of a solution.

Введение. Впервые скорость распространения потенциала действия (возбуждения) по нервному волокну была измерена профессором физиологии Кенигсбергского университета Германом Гельмгольцем в 1850 году – спустя год после того, как И. Физо измерил скорость распространения света. Оказалось, что скорость распространения возбуждения составляет всего порядка 30 м/с.

Значения скорости распространения ПД было примерно в 10 000000 раз меньше скорости распространения электрического тока по металлическому проводнику, и даже в 10 раз медленнее скорости распространения звука в воздухе.

Полученные результаты, с одной стороны, нанесли удар по сторонникам теории мгновенного распространения возбуждения, но одновременно и поставили исследователей перед необходимостью более детально изучить различия механизмов проведения электрического потенциала в проводниках и нервном волокне. Прежде всего, следовало дать ответ на вопросы: почему возбуждение способно распространяться по нервному волокну и от чего зависит скорость распространения нервного импульса?

Потенциа́л де́йствия – волна возбуждения, перемещающаяся по мембране живой клетки в виде кратковременного изменения мембранного потенциала на небольшом участке возбудимой клетки (нейрона или кардиомиоцита), в результате которого наружная поверхность этого участка становится отрицательно заряженной по отношению к внутренней поверхности мембраны, в то время, как в покое она заряжена положительно (рисунок 1). Потенциал действия является физиологической основой нервного импульса.

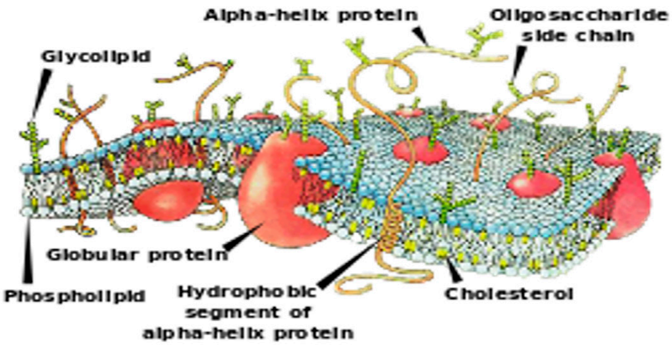

Рисунок 1 – Схема строения мембраны клетки

Активные свойства мембраны, обеспечивающие возникновение потенциала действия, основываются главным образом на поведении потенциал-зависимых натриевых (Na^+-) и калиевых (K^+-) каналов. Начальная фаза ПД формируется входящим натриевым током, позже открываются калиевые каналы и выходящий K^+-ток возвращает потенциал мембраны к исходному уровню. Исходную концентрацию ионов затем восстанавливает натрий-калиевый насос.

Благодаря работе "натрий-калиевого насоса" концентрация ионов натрия в цитоплазме клетки очень мала по сравнению с окружающей средой. При проведении потенциала действия открываются потенциал-зависимые натриевые каналы и положительно заряженные ионы натрия поступают в цитоплазму по градиенту концентрации, пока он не будет уравновешен положительным электрическим зарядом. Вслед за этим потенциал-зависимые каналы инактивируются, и отрицательный потенциал покоя восстанавливается за счёт диффузии из клетки положительно заряженных ионов калия, концентрация которых в окружающей среде также значительно ниже внутриклеточной.

Натриевая теория возникновения потенциала действия была предложена, разработана и экспериментально подтверждена А. Ходжкином и А. Хаксли [1], за что они были удостоены Нобелевской премии в 1963 году.

Распространение потенциала действия по нервному волокну называется волной возбуждения. Эта волна не затухает, так как получает энергию из среды – от заряженной мембраны. Волна возбуждения является автоволной в активной среде возбудимых клеток.

Немного позднее Герман и Бернштейн проследили за движением импульса по волокну и даже – что очень важно – измерили скорость этого движения, т. е. скорость распространения возбуждения. А важно это потому, что скорость оказалась точь-в-точь равной той, которую за двадцать лет до того измерил Гельмгольц.

Актуальность исследования. Для современной науки характерно применение точных математических методов в самых различных областях знания, в том числе и в биофизике. В науку о живой природе математика входит различными путями: с одной стороны – это использование современной вычислительной техники для быстрой обработки результатов биофизических экспериментов, с другой – создание математических моделей, описывающих различные живые системы и происходящие в них процессы. Не менее важна и "обратная связь", возникающая между математикой и биофизикой: последняя не только служит ареной для применения математических методов, но и становится все более существенным источником новых математических задач.

Одной из областей успешного симбиоза математики и биофизики следует считать исследование биоэлектрических явлений. Современная электрофизиология немыслима без широкого использования математического моделирования процессов, протекающих в живых электровозбудимых структурах.

За более чем пятидесятилетний период, начало которому положил фундаментальный труд А. Ходжкина и А. Хаксли [1], создано немало таких моделей. Большинство из них сегодня представляет лишь историческую ценность, другие – не потеряли своей актуальности и находят практическое применение. Однако, как следует из результатов экспериментальных исследований, проведенных в последнее время, традиционные подходы к математическому описанию электрических явлений в живых организмах оказываются явно недостаточными.

Постановка параболической задачи. В двумерном пространстве процесс распространения потенциала действий по нервному волокну описывается параболическим телеграфным уравнением [2, с. 110; 3, с. 138]:

$$C_m(x,y)u'_t(x,y,t)=\frac{r_a(x,y)}{2\rho_a(x,y)}\Delta u(x,y,t)-\frac{u(x,y,t)}{\rho_m(x,y)l}\ ,\ (x,t)\in R_+^2,\ y\in R\ , \tag{1}$$

где $C_m(x,y)$ – емкость на единицу площади мембраны; $r_\alpha(x,y)$ – радиус нервного волокна; $\rho_m(x,y)$ – удельное сопротивление плазмы нервного волокна; l – толщина мембраны; $u(x,y,t)$ – внутриклеточный потенциал действий; индексы a и m – означают соответственно индексы аксона (нервного волокна) и мембраны; $\Delta u(x,y,t)=u''_{xx}(x,y,t)+u''_{yy}(x,y,t)$ – оператор Лапласа.

Для определения единственности решения уравнения (1) задаем начальное и граничное условие вида:

$$u(x,y,t)|_{t<0}\equiv 0,\ u'_x(x,y,t)|_{x=0}=h(y)\theta(t)+r(y)\theta_1(t)+p(y)\theta_2(t),\ t\in R_+, \tag{2}$$

где $h(y)$, $r(y)$, $p(y)$ – заданные функции; $\theta(t)$ – тета-функция Хевисайда, $\theta_1(t)=t\theta(t)$, $(t)=\frac{t^2}{2}\theta(t)$.

Постановка гиперболической задачи. Используя преобразования Лапласа по методике С.И. Кабанихина [4], из задачи (1)–(2) переходим к задаче уравнения гиперболического типа [5]:

$$C_m(x,y)\frac{\partial^2 V(x,y,t)}{\partial t^2}=\frac{r_a(x,y)}{2\rho_a(x,y)}\Delta V(x,y,t)-\frac{V(x,y,t)}{\rho_m(x,y)l},\ (x,y)\in R_+^2,\ y\in R\ , \tag{3}$$

$$V(x,y,t)|_{t<0}\equiv 0,\ \left.\frac{\partial V(x,y,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=h(y)\delta(t)+r(y)\theta(t)+p(y)\theta_1(t),\ y\in R\ ,\ t\in R_+, \tag{4}$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака; $h(y)$, $r(y)$, $p(y)$ – заданные функции.

Первое условие (2) означает, что нервно-волоконная среда до времени $t<0$ находится в состоянии покоя, а начиная со времени $t=0$, будет действовать потенциал и начнется распространение потенциала действий по нервному волокну.

Второе условие (2) означает, что на границе x будет действовать сила источников с величинами $h(y)$, $r(y)$, $p(y)$ соответственно.

Функции $u(x,y,t)$ и $V(x,y,t)$ связаны соотношением [4]:

$$u(x,y,t)=\int_0^\infty V(x,y,\tau)G_t(t,\tau)d\tau=\int_0^\infty V(x,y,\tau)G_{tt}(t,\tau)d\tau\ , \tag{5}$$

где $G(t,\tau)$ – функция Грина, $G(t,\tau)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\tau^2}{4t}}$.

Постановка задачи. Показать единственность решения задачи (3)–(4), т. е. $V(x,y,t)$ – единственное решение при известных значениях коэффициентов $C_m(x,y)$, $r_a(x,y)$, l, $\rho_a(x,y)$, $\rho_m(x,y)$, а также при известных значениях $h(y)$, $r(y)$, $p(y)$.

Предположим, что относительно коэффициентов уравнения выполнены условия [5]:

$$\left.\begin{array}{c} C_m(x,y), r_a(x,y), \rho_a(x,y), \rho_m(x,y) \in \Lambda_1 \\ h(y), r(y), p(y) \in \Lambda_2, l>0 \end{array}\right\}, \tag{6}$$

где $\Lambda_1=\{C_m(x,y)\in C^2((0,d)x(-D_1,D_1)), 0<M_1\le C_m(x,y)\le M_2\}$,

$$\sup p\{C_m(x,y)C((0,d)x(-D_1,D_1)), \alpha=\|C_m(x,y)\|_{C^2}\le M_2\},$$

$\Lambda_1=\sup p\{h(y)\}\in(-D,D), h(y)\in C(-D,D)$,

$D=D_1+T(M_2+\alpha), T=\frac{2\alpha}{(M_1-\alpha)}, M_1, M_2, D$ – положительно постоянные числа.

Сведение задачи (3)–(4) к регулярной задаче. Для выпрямления характеристики введем новую переменную $\alpha(x,y)$, которая является решением задачи Эйконала вида [5]:

$$\left.\begin{array}{c} \alpha_x^2(x,y)+\alpha_y^2(x,y)=\frac{2\rho a(x,y)Cm(x,y)}{Ra(x,y)} \\ \alpha(x,y)\big|_{x=0}=0, \alpha(x,y)\big|_{x=0}=\frac{2\rho a(0,y)\cdot Cm(0,y)}{Ra(0,y)} \\ \alpha_x(x,y)>0, \lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x,y)=\infty \end{array}\right\}, \tag{7}$$

введем также новые функции: $Cm(\alpha(z,y),y)=C_m(x,y)$, $\rho a(\alpha,y)=\rho_a(x,y)$, $\rho m(\alpha,y)=\rho_m(x,y)$, $ra(\alpha,y)=r_a(x,y)$, $v(\alpha(x,y),y,t)=V(x,y,t)$.

Представляем решение прямой задачи из сингулярной и регулярной частей решения следующего вида [6]:

$$\vartheta(\alpha,y,t)=\tilde{\vartheta}(\alpha,y,t)+S(t,y)\theta(t-|\alpha|)+R(t,y)\theta_1(t-|\alpha|)+P(t,y)\theta_2(t-|\alpha|), \tag{8}$$

где $\tilde{\vartheta}(\alpha,y,t)$ – непрерывная функция.

Тогда получим прямую задачу с данными на характеристиках:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\alpha^2}+L_1\vartheta(\alpha,y,t), |\alpha|<y<T, y\in(-D,D) \\ V(\alpha,y,t)_{|\alpha|=t}=S(t,y), t\in(0,T), y\in(-D,D) \\ V(\alpha,y,t)_{y=-D}=V(\alpha,y,t)_{y=D}=0 \end{array}\right\}, \tag{9}$$

где

$$L_1(\alpha,y,t)=\frac{ra(\alpha,y)}{2\rho a(\alpha,y)Cm(\alpha,y)}\left[\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2}+\Delta\alpha\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}+\alpha_y^{'}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\alpha\partial y}\right]-\frac{1}{Cm(\alpha,y)\rho a(\alpha,y)}\cdot\vartheta(\alpha,y,t). \tag{10}$$

Единственность решения. Введем обозначения и норму:

$$\left.\begin{array}{l}\Pi_1 = \max\limits_{|\alpha|<T}\max\limits_{y\in(-D,D)}\left\{\begin{array}{l}|ra(\alpha,y)|,|\rho a(\alpha,y)|,|Cm(\alpha,y)|,|\rho m(\alpha,y)|,\\ |\rho a_a^{'}(\alpha,y)|,|Cm_a^{'}(\alpha,y)|,|\rho m_a^{'}(\alpha,y)|\end{array}\right\}\\ \Pi_2 = \min\limits_{|\alpha|<T}\min\limits_{y\in(-D,D)}\{|\rho a(\alpha,y)|,|Cm(\alpha,y)|,|\rho m(\alpha,y)|\}\\ \Pi_1 = \max\limits_{z\in T}\max\limits_{y\in(-D,D)}\{|\alpha y(z,t)|,|\Delta a(z,y)|\}\end{array}\right\}, \tag{11}$$

$$\|v\|_t^2(t) = \int\limits_{-D}^{D}\int\limits_{-t}^{t} v^2(\alpha,y,t)\,d\alpha dy,\ t\in[0,T].$$

Умножаем каждый член уравнения (9) на $2\dfrac{\partial v}{\partial t}$, и, интегрируя, получим следующие выражения:

$$2\cdot\frac{\partial v}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2\right], 2\frac{\partial v}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 2\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial t}\right] - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right]^2,$$

$$2\frac{\partial v}{\partial t}\cdot\frac{ra(\alpha,y)}{2\rho a(\alpha,y)\cdot Cm(\alpha,y)}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{ra(\alpha,y)}{2\rho a(\alpha,y)\cdot Cm(\alpha,y)}\left\{2\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial t}\right] - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial v}{\partial y}\right]^2\right\},$$

$$2\frac{\partial v}{\partial t}\cdot\frac{ra\ \alpha,y)}{2\rho a(\alpha,y)\cdot Cm(\alpha,y)}\Delta\alpha\frac{\partial v}{\partial\alpha} = \frac{2ra(\alpha,y)}{2\rho a(\alpha,y)\cdot Cm(\alpha,y)}\left[\frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial t}\right],$$

$$2\frac{\partial v}{\partial t}\cdot\frac{ra(\alpha,y)}{2\rho a(\alpha,y)\cdot Cm(\alpha,y)}\alpha y\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial y} = \frac{2ra(\alpha,y)}{2\rho a(\alpha,y)\cdot Cm(\alpha,y)}\alpha y\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial t}\right] + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial t}\right] - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right]\right\},$$

$$2\frac{\partial v}{\partial t}\cdot\frac{1}{Cm(\alpha,y)\cdot\rho m(\alpha,y)\cdot l}v(\alpha,y,t) = \frac{2}{Cm(\alpha,y)\cdot\rho m(\alpha,y)\cdot l}\frac{\partial v}{\partial t}\cdot v(\alpha,y,t).$$

Теперь проинтегрируем по области $\Omega(T,D) = \{\Delta(T)\times(-D,D)\}$,

где $\Delta(T) = \{(\alpha,t): |\alpha| < t < T, a\in(-T,T)\}$, уравнение (9):

$$\int\limits_a^t\int\limits_{-D}^{D}\int\limits_{-t}^{t} 2\frac{\partial v}{\partial\tau}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial\tau^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2} - L_1 v(\alpha,y,t)\right]d\alpha dy d\tau = \int\limits_{-D}^{D}\int\limits_{-t}^{t}\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial\tau^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2} + \right.$$

$$+\frac{ra(\alpha,y)}{2\rho a(\alpha,y)\cdot Cm(\alpha,y)}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \alpha_y\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right]\Bigg|_{\tau=|\alpha|}^{\tau=t} d\alpha dy + \int\limits_{|a|}^{t}\int\limits_{-D}^{D}\int\limits_{-t}^{t} 2\frac{\partial v}{\partial\tau}\cdot\frac{ra(\alpha,y)}{2\rho a(\alpha,y)\cdot Cm(\alpha,y)}\cdot$$

$$\frac{\partial v}{\partial\tau}d\alpha dy d\tau - 2\int\limits_{|a|}^{t}\int\limits_{-D}^{D}\int\limits_{-t}^{t}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial\tau}\right) + \frac{ra(\alpha,y)}{2\rho a(\alpha,y)Cm(\alpha,y)}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial\tau}\right) + \right.$$

$$+\frac{ra(\alpha,y)}{2\rho a(\alpha,y)\cdot Cm(\alpha,y)}\alpha_y\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial\tau}\right) + \frac{\partial}{\partial^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial\tau}\right)\right] + \frac{1}{Cm(\alpha,y)\cdot\rho a(\alpha,y)\cdot l}\cdot$$

$$\left.\left.\cdot\ v(\alpha,y,t)\frac{\partial v}{\partial\tau}\right\}\right\}d\alpha dy d\tau = 0,(\alpha,y,t)\in\Omega(T,D). \tag{12}$$

Используя $v(\alpha,-D,t)=v(\alpha,D,t)$, получим:

$$\int_{|\alpha|}^{t}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\frac{ra(\alpha,y)}{2\rho a(\alpha,y)\cdot Cm(\alpha,y)}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial \tau}\right)d\alpha dy d\tau=$$

$$=\int_{|\alpha|}^{t}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{ra\ \alpha,y)}{2\rho a(\alpha,y)\cdot Cm(\alpha,y)}\frac{\partial v}{\partial \tau}\frac{\partial v}{\partial y}\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{ra(\alpha,y)}{2\rho a(\alpha,y)\cdot Cm(\alpha,y)}\right]\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial \tau}\right\}d\alpha dy d\tau=$$

$$=\int_{|\alpha|}^{t}\int_{-t}^{t}\left\{\left[\frac{ra(\alpha,D)}{2\rho a(\alpha,y)\cdot Cm(\alpha,D)}\frac{\partial v}{\partial \tau}\frac{\partial v}{\partial y}\right]_{-D}^{D}-\left[\frac{ra(\alpha,-D)}{2\rho a(\alpha,-D)\cdot Cm(\alpha,-D)}\frac{\partial v}{\partial \tau}\frac{\partial v}{\partial y}\right]_{-D}^{D}\right\}d\alpha dy d\tau=$$

$$=-\int_{|\alpha|}^{t}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{(ra\ \alpha,y)}{2\rho a(\alpha,y)\cdot Cm(\alpha,y)}\right)\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial \tau}\right]d\alpha dy d\tau=-\int_{|\alpha|}^{t}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{(ra\ \alpha,y)}{2\rho a(\alpha,y)\cdot Cm(\alpha,y)}\right)\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial \tau}\right]d\alpha dy d\tau.$$

Вычислим другие интегралы:

$$\int_{|\alpha|}^{t}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \tau}\right]d\alpha dy d\tau=\int_{|\alpha|}^{t}\int_{-D}^{D}\left[\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial \tau}\right]_{\alpha=-t}^{\alpha=t}dy d\tau.$$

$$\int_{|\alpha|}^{t}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\frac{ra(\alpha,y)}{2\rho a(\alpha,y)\cdot Cm(\alpha,y)}\alpha_y\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial \tau}\right]d\alpha dy d\tau=\int_{|\alpha|}^{t}\int_{-D}^{D}\left\{\left[\frac{ra(\alpha,y)}{2\rho a(\alpha,y)\cdot Cm(\alpha,y)}\alpha_y\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial \tau}\right]_{\alpha=-t}^{\alpha=t}\right\}dy d\tau-$$

$$-\int_{|\alpha|}^{t}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{(ra\ \alpha,y)}{2\rho a(\alpha,y)\cdot Cm(\alpha,y)}\right]\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial \tau}d\alpha\partial y\partial\tau=\int_{|\alpha|}^{t}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{(ra\ \alpha,y)}{2\rho a(\alpha,y)\cdot Cm(\alpha,y)}\right]\alpha_y\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial \tau}d\alpha\partial y\partial\tau.$$

$$\int_{|\alpha|}^{t}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\frac{ra(\alpha,y)}{\rho a(\alpha,y)\cdot Cm(\alpha,y)}\alpha_y\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \tau}d\alpha dy d\tau=-\int_{|\alpha|}^{t}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{(ra\ \alpha,y)}{\rho a(\alpha,y)\cdot Cm(\alpha,y)}\right]\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \tau}d\alpha dy d\tau.$$

$$\int_{|\alpha|}^{t}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{1}{(\rho a\ \alpha,y)\cdot Cm(\alpha,y)}\cdot\frac{\partial v}{\partial \tau}\cdot v(\alpha,y,\tau)\right]d\alpha dy d\tau.$$

Используя последние выражения, а также введенные обозначения и нормы (11), из соотношения (12) получим [7]:

$$\|v\|_1^2(t)\le\|v\|_1^2(|\alpha|)+\frac{\Pi_1}{\Pi_2^2}\int_{|\alpha|}^{t}\left\|\frac{\partial v}{\partial \tau}\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right\|(\tau)d\tau+\frac{2\Pi_1^3}{\Pi_2^4}\int_{|\alpha|}^{t}\left\|\frac{\partial v}{\partial \tau}\frac{\partial v}{\partial y}\right\|(\tau)d\tau+$$

$$+\frac{2\Pi_1^3\Pi_3}{\Pi_2^4}\int_{|\alpha|}^{t}\left\|\frac{\partial v}{\partial \tau}\frac{\partial v}{\partial y}\right\|(\tau)d\tau+\frac{2\Pi_1^3}{\Pi_2^4}\int_{|\alpha|}^{t}\left\|\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \tau}\right\|(\tau)d\tau+\frac{1}{\Pi_2^2\cdot l}\int_{|\alpha|}^{t}\left\|\frac{\partial v}{\partial \tau}\cdot v\right\|(\tau)d\tau. \qquad (13)$$

Можарируя нормы, получим:

$$\int_{|\alpha|}^{t}\left\|\frac{\partial v}{\partial \tau}\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right\|(\tau)d\tau\le\int_{|\alpha|}^{t}\left[\left\|\frac{\partial v}{\partial \tau}\right\|^2+\left\|\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right\|^2\right](\tau)d\tau\le\int_{|\alpha|}^{t}\|v\|_1^2(\tau)d\tau.$$

Учитывая последнее неравенство из оценки (13) получим:

$$\max_{|\alpha|\le t\le T}\left\{\|v\|_1^2(t)\right\}\le\|v\|_1^2(\alpha)\exp\left[\left(\frac{\Pi_1}{\Pi_2^2}+\frac{4\Pi_1^3}{\Pi_2^4}+\frac{2\Pi_1^3\Pi_3}{\Pi_2^4}+\frac{1}{\Pi_2^2\cdot l}\right)t\right]. \qquad (14)$$

Из последнего неравенства, используя энергетические неравенства для гиперболических уравнений, получим:

$$\max_{|\alpha| \le t \le T} \left\{ \|v\|_2^2(t) \right\} \le \|v\|_2^2(|\alpha|) \exp\left[\left(\frac{\Pi_1}{\Pi_2^2} + \frac{4\Pi_1^3}{\Pi_2^4} + \frac{2\Pi_1^3\Pi_3}{\Pi_2^4} + \frac{1}{\Pi_2^2 \cdot l} \right) t \right],$$

Здесь $\|v\|_2^2(t) = \left(\|v\|^2 + \|v_t\|^2 + \|v_\alpha\|^2 + \|v_y\|^2 \right)(t)$.

Таким образом, доказана теорема.

Теорема. Пусть коэффициенты уравнений $Cm(\alpha, y), \rho a(\alpha, y), ra(\alpha, y)$, а также $\alpha_y, \Delta\alpha$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка и пусть выполнено условие (6), а также решение задачи (9)–(10) существует и принадлежит в $C^2(\Omega(T, D))$. Тогда решение задачи (9)–(10) единственно в области регулярности $\Omega(T, D)$ и имеет место оценка:

$$\max_{|\alpha \le t \le T|} \left\{ \|v\|_2^2(t) \right\} \le \|v\|_2^2(|\alpha|) \exp[\Pi t], \tag{15}$$

где $\Pi = \dfrac{\Pi_1}{\Pi_2} + \dfrac{4\Pi_1^3}{\Pi_2^4} + \dfrac{2\Pi_1^3\Pi_3}{\Pi_2^4} + \dfrac{1}{\Pi_2^2 \cdot l}$.

Из эквивалентности задач (9)–(10) и (3)–(4), эквивалентности задачи (1)–(2) следует, что решение параболической задачи (1)–(2) также единственно в области Ω (T, D).

Литература

1. *Hodjkin A.* A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve / A. Hodjkin, A. Huxley // J. Physiol. London. 1952. N4. P. 500–544.
2. *Пономаренко Г.Н.* Биофизические основы физиотерапии : учеб. пособие / Г.Н. Пономаренко, И.И. Тарковский. М.: Медицина, 2006. 176 с.
3. *Новиков Д.А.* Биофизика: курс лекций: в 2 ч. Ч. 1 / Д.А. Новиков, М.М. Филимонов. Минск: БГУ, 2008. 184 с.
4. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи / С.И. Кабанихин. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. 457с.
5. *Сатыбаев А.Дж.* Конечно-разностное регуляризованное решение обратных задач гиперболического типа / А.Дж. Сатыбаев. Ош, 2001. 143 с.
6. *Романов В.Г.* Устойчивость в обратных задачах / В.Г. Романов. М.: Научный мир, 2004. 304 с.
7. *Сатыбаев А.Дж.* Единственность решения одной прямой задачи акустики с мгновенным источником и плоской границей / А.Дж. Сатыбаев, Ж.К. Матисаков // Проблемы автоматики и управления: матер. межд. конф. “Проблемы управления и информационных технологий”. Бишкек: ИАИТ, 2010. С. 159–163.