УДК 515.12 (575.2) (04)

О СУПЕРПОЛНЫХ РАВНОМЕРНО НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

А.А. Чекеев, Т.Д. Касымова

Посредством распространения понятий и утверждений, касающихся пространств, на их отображения введены суперполные равномерно непрерывные отображения и исследованы их некоторые свойства. Найдена категорная характеристика суперполных равномерно непрерывных отображений.

Ключевые слова: устойчивый фильтр; категория; А-замкнутость.

В 1983 г. на семинаре по топологии (Карловский университет, г. Прага) З. Фролик поставил задачу: *Охарактеризовать компактные и полные пространства*.

В 2007 г. академик А.А. Борубаев решил поставленную задачу и *дал категорую характеристику компактных, полных равномерных пространств и полных по Райкову топологических групп* [1].

Поскольку пространство можно рассматривать как частный случай отображения, отождествляя его с отображением в точку, возникает идея распространения на отображения понятий и утверждений, имеющихся для пространств, что позволяет обобщить многие результаты.

Нами предпринята попытка охарактеризовать равномерно непрерывные отображения посредством пространств замкнутых подмножеств в терминах категорий.

Пусть $(\mathrm{X},\mathscr{U})$ – равномерное пространство, $(\exp\mathrm{X},\exp\mathscr{U})$ – пространство замкнутых подмножеств с Хаусдорфовой равномерностью.

Определение 1 ([1]). Равномерное пространство $(\mathrm{X},\mathscr{U})$ называется *суперполным,* если его гиперпространство $(\exp\mathrm{X},\exp\mathscr{U})$ полно.

Пусть $f:(\mathrm{X},\mathscr{U})\to(Y,\mathscr{V})$ – равномерно непрерывное отображение равномерного пространства $(\mathrm{X},\mathscr{U})$ в равномерное пространство $(Y,\mathscr{V})$.

Определение 2 ([1]). Фильтр $\mathscr{F}$ в $(\mathrm{X},\mathscr{U})$ называется *устойчивым (stable),* если для любого покрытия $\alpha\in\mathscr{U}$ найдется такое $\mathrm{F}'\in\mathscr{F}$ что $\mathrm{F}'\subset\alpha(\mathrm{F})$ для любого $\mathrm{F}\in\mathscr{F}$.

Предложение 1. Всякий фильтр Коши является устойчивым.

Доказательство. Пусть $\mathscr{F}$ – произвольный фильтр Коши в $(\mathrm{X},\mathscr{U})$. Для произвольного покрытия $\alpha\in\mathscr{U}$ найдутся $\mathrm{A}\in\alpha$ и фиксированное $\mathrm{F}_\alpha\in\mathscr{F}$ такие, что $\mathrm{F}_\alpha\subset\mathrm{A}$ и $\mathrm{F}_\alpha\in\alpha$. Для любого $\mathrm{F}\in\mathscr{F}$ имеет место $\mathrm{F}\cap\mathrm{F}_\alpha\neq\varnothing$, а это означает $\mathrm{F}\cap\alpha(\mathrm{F}_\alpha)\neq\varnothing$. Как показано выше элемент F_α одновременно является элементом и фильтра $\mathscr{F}$, и покрытия α, тогда $\mathrm{F}_\alpha\subset\alpha(\mathrm{A})$. Следовательно, $\mathrm{A}\subset\alpha(F)$ и $\mathrm{F}_\alpha\subset\alpha(\mathrm{F})$ для любого $\mathrm{F}\in\mathscr{F}$, а это означает устойчивость фильтра Коши $\mathscr{F}$. Предложение доказано.

Предложение 2. Равномерно непрерывный образ $f\mathscr{F}$ всякого устойчивого фильтра $\mathscr{F}$ в $(\mathrm{X},\mathscr{U})$ является базой некоторого устойчивого фильтра в $(Y,\mathscr{V})$.

Доказательство. Пусть $\mathscr{F}$ – устойчивый фильтр Коши в $(\mathrm{X},\mathscr{U})$ и $f\mathscr{F}=\{f(\mathrm{F}):\mathrm{F}\in\mathscr{F}\}$. Пусть $\hat{\boldsymbol{O}}$ – фильтр, порожденный равномерно непрерывным образом $f\mathscr{F}$ в $(Y,\mathscr{V})$, т.е. $\hat{\boldsymbol{O}}=\{\Phi\subset Y:\exists\,\mathrm{F}\in\mathscr{F}\text{ такое, что } f(\mathrm{F})\subset\Phi\}$, так что для любого покрытия $\alpha\in\mathscr{V}$ найдется множество

$\Phi' \in \hat{\boldsymbol{O}}$ такое, что $\Phi' \subset \alpha(\Phi)$ для любого элемента $\Phi \in \hat{\boldsymbol{O}}$. В силу равномерной непрерывности отображения *f* и устойчивости фильтра $\mathcal{F}$ для любого покрытия $\beta \in \mathcal{U}$ найдется такой элемент $\mathrm{F}' \in \mathcal{F}$, что $\mathrm{F}' \subset \beta(\mathrm{F})$ для любого множества $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$ существует такое покрытие $\alpha \in \mathcal{V}$, что $f\beta \succ \alpha$, следовательно, выполняется $f(\mathrm{F}') \subset f(\beta(\mathrm{F}')) = f(\beta)(f(\mathrm{F})) \subset \alpha(f(\mathrm{F})) \subset \alpha(\Phi)$. Положим, что $\Phi' = f(\mathrm{F}')$, тогда $\Phi' \in \varphi$, а это означает, по определению 2, что $\hat{\boldsymbol{O}}$ – устойчивый фильтр в *Y*.

Итак, равномерно непрерывный, образ $f\mathcal{F}$ устойчивого фильтра $\mathcal{F}$ Коши является базой некоторого устойчивого фильтра $\hat{\boldsymbol{O}}$ Коши в равномерном пространстве $(Y,\mathcal{V})$. Предложение доказано.

Определение 3. Равномерно непрерывное отображение $f:(\mathrm{X},\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ называется *суперполным*, если для всякого устойчивого (stable) фильтра $\mathcal{F}$ в $(\mathrm{X},\mathcal{U})$, для которого $\bigcap\left\{\overline{f(\mathrm{F})} : \mathrm{F} \in \mathcal{F}\right\} \neq \varnothing$ следует, что $\bigcap\left\{\overline{(\mathrm{F})} : \mathrm{F} \in \mathcal{F}\right\} \neq \varnothing$.

Предложение 3. Всякое суперполное отображение является полным.

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ – произвольный фильтр Коши в $(\mathrm{X},\mathcal{U})$ такой, что $\bigcap\left\{\overline{f(\mathrm{F})} : \mathrm{F} \in \mathcal{F}\right\} \neq \varnothing$. В силу предложения 1, фильтр Коши $\mathcal{F}$ является устойчивым. В силу предложения 2, его равномерно непрерывный образ $f\mathcal{F}$ является базой устойчивого фильтра. Из условия $\bigcap\left\{\overline{f(\mathrm{F})} : \mathrm{F} \in \mathcal{F}\right\} = \{y\}$ для любого $y \in Y$, тогда в силу суперпополноты отображения f имеем $\bigcap\left\{\overline{(\mathrm{F})} : \mathrm{F} \in \mathcal{F}\right\} \neq \varnothing$, т.е. фильтр $\mathcal{F}$ является сходящимся. Следовательно, равномерно непрерывное отображение *f* является полным. Предложение доказано.

Предложение 4. Всякое замкнутое подпространство суперполного пространства является полным.

Доказательство. Пусть $(\mathrm{X},\mathcal{U})$ – суперполное равномерное пространство и $A \subset \mathrm{X}$, тогда $(A,\mathcal{U}_A)$ – его замкнутое подпространство. Всякий устойчивый фильтр Коши $\mathcal{F}$ в *A* является базой и некоторого устойчивого фильтра Коши в *X* (предложение 2) и, значит, сходится к некоторой точке $x \in \mathrm{X}$. Но так как *A* замкнуто, то $x \in A$, следовательно, устойчивый фильтр Коши $\mathcal{F}$ сходится в *A*, т.е. $\bigcap\left\{\overline{\mathrm{F}} : \mathrm{F} \in \mathcal{F}\right\} = \{x\} \neq \varnothing$.

Предложение 5. Пусть $f:(\mathrm{X},\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ – равномерно непрерывное суперполное отображение равномерного пространства $(\mathrm{X},\mathcal{U})$ на равномерное пространство $(Y,\mathcal{V})$. Тогда $\left(f^{-1}(y), \mathcal{U}|_{f^{-1}(y)}\right)$ является суперполным для всякой точки $y \in Y$.

Доказательство. Пусть $y \in Y$ – произвольная точка и $\mathcal{U}|_{f^{-1}(y)}$ – равномерность, индуцированная $f^{-1}(y)$ равномерностью $\mathcal{U}$. Пусть $\mathcal{F}$ – произвольный устойчивый фильтр Коши в $\left(f^{-1}(y), \mathcal{U}|_{f^{-1}(y)}\right)$, т.е. для любого множества $\mathrm{B} \in \mathcal{F}$ найдется $\mathrm{A}_\beta \in \mathcal{F}$ такое, что $\mathrm{B} \subset \alpha(\mathrm{A}_\beta)$. В силу суперполноты отображения f следы всех замыканий имеют непустое пересечение, имеем $\cap\left\{\overline{f(F)} : F \in \mathcal{F}\right\} = \{y\} \neq \varnothing$, т.е. $f\mathcal{F}$ гиперсходится к $y \in Y$. Тогда $F_a \cap \alpha(\mathrm{A}_\beta) \neq \varnothing$, т.е. $\mathcal{F}$ является устойчивым фильтром Коши в $(\mathrm{X},\mathcal{U})$ и, в силу суперполноты отображения *f*, $\cap\left\{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\right\} \neq \varnothing$, т.е.

устойчивый фильтр Коши $\mathcal{F}$ сходится в $\left(f^{-1}(y),\mathcal{U}\big|_{f^{-1}(y)}\right)$, а это означает, что $\left(f^{-1}(y),\mathcal{U}\big|_{f^{-1}(y)}\right)$ является суперполным для всякой точки $y \in Y$. Что и требовалось доказать.

Определение 4 ([3]). Пусть $\mathcal{K}$ – произвольная категория, $\mathcal{A}$ – некоторый класс морфизмов категории $\mathcal{K}$. Объект *X* категории $\mathcal{K}$ называется $\mathcal{A}$*-замкнутым,* если каждый морфизм $f: \mathrm{X} \to Y$ для произвольного объекта *Y*, принадлежит классу $\mathcal{A}$.

По аналогии с работой [3] дадим характеристику суперполных равномерно непрерывных отображений в терминах категорий.

Теорема 1. Пусть *Unif* – категория равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений, а $\mathcal{A}$ – класс равномерно непрерывных суперполных отображений. Для того чтобы равномерное пространство $(\mathrm{X},\mathcal{U})$ было суперполным, необходимо и достаточно, чтобы объект $(\mathrm{X},\mathcal{U})$ категории *Unif* был $\mathcal{A}$-замкнутым.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть $(\mathrm{X},\mathcal{U})$ – суперполное равномерное пространство, а равномерно непрерывное отображение $f:(\mathrm{X},\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ равномерного пространства $(\mathrm{X},\mathcal{U})$ в произвольное равномерное пространство $(Y,\mathcal{V})$. Покажем, что отображения *f* суперполно. Пусть $\mathcal{F}$ – произвольный устойчивый фильтр Коши в $(\mathrm{X},\mathcal{U})$. В силу полноты равномерного пространства $(\mathrm{X},\mathcal{U})$, устойчивый фильтр Коши $\mathcal{F}$ гиперсходится в $(\mathrm{X},\mathcal{U})$ независимо от того, что его образ $f\mathcal{F}$ гиперсходится в $(Y,\mathcal{V})$ или нет. Значит, *f* – суперполное отображение, а объект $(\mathrm{X},\mathcal{U})$ является $\mathcal{A}$-замкнутым.

*Достаточность***.** Пусть $(\mathrm{X},\mathcal{U})$ категории $\mathcal{K}$ является $\mathcal{A}$-замкнутым, т.е. каждое равномерно непрерывное отображение $f:(\mathrm{X},\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ равномерного пространства $(\mathrm{X},\mathcal{U})$ в произвольное равномерное пространство $(Y,\mathcal{V})$ является суперполным отображением. Покажем, что равномерное пространство $(\mathrm{X},\mathcal{U})$ суперполно. Пусть $\mathcal{F}$ – произвольный устойчивый фильтр Коши в $(\mathrm{X},\mathcal{U})$. Так как $(Y,\mathcal{V})$ – произвольное равномерное пространство, то его будем считать одноточечным. Тогда $f:(\mathrm{X},\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ – постоянное отображение и образ $f\mathcal{F}$ фильтра Коши гиперсходится в $(Y,\mathcal{V})$. Тогда, в силу определения суперполноты отображения *f*, равномерное пространство $(\mathrm{X},\mathcal{U})$ является суперполным. Теорема 1 доказана полностью.

Теорема 1 непосредственно влечет равномерный аналог теоремы Исбелла [1] о равномерно паракомпактных пространствах с максимальной равномерностью $\mathcal{U}_{\mathrm{X}}$.

Следствие ([1]**).** Пусть *Unif* – категория равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений, а $\mathcal{A}$ – класс равномерно непрерывных суперполных отображений. Для того чтобы равномерное пространство $(\mathrm{X},\mathcal{U})$ было равномерно паракомпактным и $\lambda\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\mathrm{X}}$, необходимо и достаточно, чтобы объект $(\mathrm{X},\mathcal{U})$ категории *Unif* был $\mathcal{A}$-замкнутым.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть равномерное пространство $(\mathrm{X},\mathcal{U})$ равномерно паракомпактно, тогда его топологическое пространство $(\mathrm{X},\tau_{\mathcal{U}})$ паракомпактно, и наоборот, если (X,τ) – паракомпакт, тогда $(\mathrm{X},\mathcal{U}_{\tau})$ равномерно паракомпактно, где $\mathcal{U}_{\tau}$ – максимальная равномерность на *X*, порождающая топологию τ [2]. Далее, для равномерно паракомпактного пространства $(\mathrm{X},\mathcal{U})$ индекс полноты $ic(U) \le \aleph_0$ и $(\mathrm{X},\mathcal{U})$ является полным [2]. Всякое суперполное пространство $(\mathrm{X},\mathcal{U})$ является полным, обратное, вообще говоря, неверно. В силу теоремы 1, *f* – суперполное отображение, а объект $(\mathrm{X},\mathcal{U})$ является $\mathcal{A}$-замкнутым.

*Достаточность***.** Пусть $(X,\mathscr{U})$ – объект категории *Unif* является $\mathscr{A}$-замкнутым, т.е. каждое равномерно непрерывное отображение $f:(X,\mathscr{U})\to(Y,\mathscr{V})$ равномерного пространства $(X,\mathscr{U})$ в произвольное равномерное пространство $(Y,\mathscr{V})$ является суперполным отображением. Покажем, что равномерное пространство $(X,\mathscr{U})$, где $\mathscr{U}_X$ – максимальная равномерность на *X*, порождающая топологию τ, равномерно паракомпактна. Пусть $\mathscr{F}$ – произвольный устойчивый фильтр Коши в $(X,\mathscr{U})$. Так как $(Y,\mathscr{V})$ – произвольное равномерное пространство, то его будем считать одноточечным. Тогда $f:(X,\mathscr{U})\to(Y,\mathscr{V})$ – постоянное отображение и образ $f\mathscr{F}$ фильтра Коши гиперсходится в $(Y,\mathscr{V})$. Тогда, в силу определения суперполноты отображения *f*, по теореме 1 и предложению 5, $\mathscr{A}$-замкнутый объект $(X,\mathscr{U})$ категории *Unif* является равномерно паракомпактным пространством. Что и требовалось доказать.

Литература

1. *Борубаев А.А*. Категорная характеристика компактных, полных равномерных пространств и полных по Райкову топологических групп // Изв. НАН КР. – 2007. – №4. – С. 3–7.
2. *Борубаев А.А.* Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. – Фрунзе: Илим, 1990.
3. *Isbell J.R*. Uniform spaces. – Providence, 1964.