УДК 517.97 (575.2) (04)

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ УПРУГИМИ КОЛЕБАНИЯМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ УРАВНЕНИЕМ С РАЗРЫВНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

А.К. Керимбеков, Р.Д. Гильмутдинов, А. Баетов

Исследованы вопросы разрешимости задачи нелинейного оптимального управления упругими колебаниями, описываемыми линейными уравнениями с разрывным коэффициентом. Найдены достаточные условия разрешимости и разработан алгоритм построения задачи оптимизации.

Ключевые слова: слабообобщенное решение; условия оптимальности; нелинейное интегральное уравнение оптимального управления; дифференциальное неравенство.

1. Слабообобщенное решение краевой задачи управляемого процесса

Рассмотрим управляемый процесс, описываемый скалярной функцией $V(t,x)$, которая удовлетворяет в $Q=(0,1)\times(0,T)$ уравнению колебания [1]:

$$V_{tt}=V_{xx}+a(t)V+g(x)f\left[t,u(t)\right] \tag{1}$$

на границе Q начальным условиям:

$$V(0,x)=\psi_1(x),\ V_t(0,x)=\psi_2(x) \tag{2}$$

и граничным условиям

$$V_x(t,0)=0,\ V_x(t,1)+\alpha V(t,1)=0,\ \alpha>0,\ t\in(0,T), \tag{3}$$

где $a(t)\in H(0,T)$, $g(x)\in H(0,1)$, $\psi_1(x)\in H(0,1)$, $\psi_2(x)\in H(0,1)$ – заданные функции, $f\left[t,u(t)\right]$ – функция внешнего воздействия, которая нелинейно зависит от функции управления $u(t)\in H(0,T)$ и является монотонной по аргументу $u(t)$, $\forall t\in[0,T]$; H – гильбертово пространство; T – фиксировано.

Определение 1.1. Любая функция $V(t,x)\in H(Q)$, которая при каждом фиксированном управлении $u(t)\in H(0,T)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{gathered}V(t,x)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[\psi_{1n}\cos\lambda_n t+\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\sin\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t a(\tau)\sin\lambda_n(t-\tau)V_n(\tau)d\tau+\\+\frac{g_n}{\lambda_n}\int_0^t\sin\lambda_n(t-\tau)f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau\Bigg]z_n(x),\end{gathered} \tag{4}$$

где ψ_{1n},ψ_{2n},g_n – коэффициенты Фурье функций $\psi_1(x),\psi_2(x),g(x)$, называется *слабообобщенным* решением краевой задачи (1)–(3).

Теорема 1.1. Пусть выполнены условия:

1) $f: H(0,T) \to H(0,T)$, то есть при каждом $u(t) \in H(0,T)$ функция $f[t,u(t)]$ является элементом пространства $H(0,T)$;

2) функция $f[t,u(t)]$ является монотонной функцией относительно функциональной переменной $u(t) \in H(0,T)$, то есть:

$$\frac{\partial f[t,u(t)]}{\partial u} \neq 0,\ t \in (0,T); \tag{5}$$

3) для функции $a(t) \in H(0,T)$ имеет место неравенство:

$$\frac{\sqrt{T}}{\lambda_1}\|a(t)\|_H < 1. \tag{6}$$

Тогда краевая задача (1)–(3) при каждом $u(t) \in H(0,T)$ в пространстве $H(Q)$ имеет единственное слабообобщенное решение.

Согласно представлению (4) относительно $V_n(t)$ имеем следующие соотношения:

$$\begin{gathered}V_n(t) = \psi_{1n}\cos\lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\sin\lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^t a(\tau)\sin\lambda_n(t-\tau)V_n(\tau)d\tau + \\ + \frac{g_n}{\lambda_n}\int_0^t \sin\lambda_n(t-\tau)f[\tau,u(\tau)]d\tau,\ n = 1,2,...\end{gathered} \tag{7}$$

При каждом фиксированном n (7) можно рассматривать как линейное неоднородное интегральное уравнение:

$$V_n(t) = \int_0^t K_n(t,\tau)V_n(\tau)d\tau + q_n(t), \tag{8}$$

где

$$K_n(t,\tau) = \frac{1}{\lambda_n}a(\tau)\sin\lambda_n(t-\tau). \tag{9}$$

$$q_n(t) = \psi_{1n}\cos\lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\sin\lambda_n t + \frac{g_n}{\lambda_n}\int_0^t \sin\lambda_n(t-\tau)f[\tau,u(\tau)]d\tau\ . \tag{10}$$

Интегральное уравнение (8) при каждом фиксированном $n = 1,2,3,...$ имеет единственное решение:

$$\begin{gathered}V_n(t) = \psi_{1n}\left(\cos\lambda_n t + \int_0^t R_n(t,\tau,1)\cos\lambda_n\tau d\tau\right) + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\left(\sin\lambda_n t + \int_0^t R_n(t,\tau,1)\sin\lambda_n\tau d\tau\right) + \\ + \frac{g_n}{\lambda_n}\int_0^t\left(\sin\lambda_n(t-s) + \int_s^t R_n(t,\tau,1)\sin\lambda_n(\tau-s)d\tau\right)f[s,u(s)]ds,\end{gathered} \tag{11}$$

где резольвента $R_n(t,\tau,1)$ определяется по формуле

$$R_n(t,\tau,1) = \sum_{i=1}^{\infty}K_n^i(t,\tau) \tag{12}$$

как сумма повторных ядер $K_n^i(t,\tau)$ [3].

Подставив (11) в (4) получим решение краевой задачи (1)–(3):

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_{1n}\left(\cos\lambda_n t+\int_0^t R_n(t,\tau,1)\cos\lambda_n\tau d\tau\right)+\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\left(\sin\lambda_n t+\int_0^t R_n(t,\tau,1)\sin\lambda_n\tau d\tau\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{g_n}{\lambda_n}\int_0^t\left(\sin\lambda_n(t-s)+\int_s^t R_n(t,\tau,1)\sin\lambda_n(\tau-s)d\tau\right)f\left[s,u(s)\right]ds\right\}z_n(x). \quad (13)$$

Заметим, что интегральное уравнение (4) эквивалентно следующему дифференциальному уравнению:

$$V''(t)+\left(\lambda_n^2-a(t)\right)V_n(t)=g_n f\left[t,u(t)\right], \quad (14)$$

которое известно как уравнение Матье [4].

Лемма 1.5. Функция $V(t,x)$, определяемая формулой (4), где $V_n(t)$ имеет вид (11), является элементом пространства $H(Q)$.

2. Постановка задачи программного управления колебательными процессами краевой задачи

Пусть управляемый процесс $V(t,x)$ описывается краевой задачей (1)–(3).

Рассмотрим задачу оптимизации, где требуется найти допустимую пару $\left(u^0(t),V^0(t,x)\right)\in H(0,T)\times H(Q)$, на которой функционал

$$\Im[u,V]=\int_0^1\left[\left(V(T,x)-\xi_1(x)\right)^2+\left(V_t(T,x)-\xi_2(x)\right)^2\right]dx+\beta\int_0^T u^2(t)dt,\ \beta>0, \quad (15)$$

где $\xi_1(x)\in H_1(0,1)$, $\xi_2(x)\in H(0,1)$ – заданные функции, принимает наименьшее значение.

На основе принципа максимума для систем с распределенными параметрами [2] получим следующие *условия оптимальности*:

$$2\beta u(t)=f_u\left[t,u(t)\right]\int_0^1 g(x)\omega(t,x)dx, \quad (16)$$

$$f_u\left[t,u(t)\right]\left(u(t)f_u^{-1}\left[t,u(t)\right]\right)_u>0, \quad (17)$$

где $\omega(t,x)$ является решением сопряженной краевой задачи

$$\omega_{tt}-\omega_{xx}-a(t)\omega=0,\ 0<x<1;\quad 0\le t<T \quad (18)$$

$$\begin{cases}\omega(T,x)+2\left(V_t(T,x)-\xi_2(x)\right)=0,\\ \omega_t(T,x)-2\left(V(T,x)-\xi_1(x)\right)=0\end{cases};\quad \begin{cases}\omega_x(t,0)=0,\\ \omega_x(t,1)+\alpha\omega(t,1)=0\end{cases} \quad (19)$$

и имеет вид:

$$\omega(t,x)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(V_n'(T)-\xi_{2n}\right)\left[\cos\lambda_n(T-t)+\int_t^T\tilde{R}_n(t,\tau,1)\cos\lambda_n(T-\tau)d\tau\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\lambda_n}\left(V_n(T)-\xi_{1n}\right)\left[\sin\lambda_n(T-t)+\int_t^T\tilde{R}_n(t,\tau,1)\sin\lambda_n(T-\tau)d\tau\right]\right\}z_n(x);$$

$$\tilde{R}(t,\tau;1)=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}K_n^i(t,\tau).$$

3. Нелинейное интегральное уравнение

Для оптимального управления $u^0(t)$, согласно условиям оптимальности (16), (17), получим нелинейное интегральное уравнение:

$$\beta u(t) f_u^{-1}\left[t,u(t)\right] = -\sum_{n=1}^{\infty} g_n \left\{ \left(V_n'(T) - \xi_{2n} \right) \left[\cos\lambda_n (T-t) + \int_t^T \tilde{R}_n(t,\tau,1)\cos\lambda_n(T-\tau)\,d\tau \right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\lambda_n}\left(V_n(T) - \xi_{1n} \right) \left[\sin\lambda_n (T-t) + \int_t^T \tilde{R}_n(t,\tau,1)\sin\lambda_n(T-\tau)\,d\tau \right] \right\}, \tag{20}$$

которое после ряда переобозначений можно привести к виду:

$$\beta u(t) f_u^{-1}\left[t,u(t)\right] + \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t) \int_0^T N_n(s) f\left[s,u(s)\right] ds = \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t) h_n \ . \tag{20'}$$

Таким образом, оптимальное управление $u^0(t)$ следует находить как решение нелинейного интегрального уравнения (20’), удовлетворяющее дифференциальному неравенству вида (17). Согласно методике, разработанной в [6, 7], для исследования уравнения (20’) сначала его преобразуем. Положим:

$$\beta u(t) f_u^{-1}\left[t,u(t)\right] = \theta(t)\ . \tag{21}$$

Из условия (17) следует, что соотношение (21) однозначно разрешается относительно $u(t)$, то есть имеет место равенство

$$u(t) = \phi\left[t,\, \theta(t), \beta\right]. \tag{22}$$

В силу (21) и (22) уравнение (20’) перепишем в виде:

$$\theta(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t) \int_0^T N_n(s) f\left[s, \phi\left[s,\, \theta(s), \beta\right]\right] ds = \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t) h_n \tag{23}$$

или в операторной форме

$$\theta = K\left[\theta\right], \tag{24}$$

где оператор $K[\cdot]$ действует по формуле

$$K\left[\theta\right] = \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t) \left[h_n - \int_0^T N_n(s) f\left[s, \phi\left[s,\, \theta(s), \beta\right]\right] ds \right],$$

* – знак транспонирования.

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия:

1. Функция $f\left[t,u(t)\right]$ удовлетворят условию Липшица по функциональному аргументу $u(t)$, т.е.

$$\left\| f\left[t,u(t)\right] - f\left[t,\bar{u}(t)\right] \right\|_H \le f_0 \left\| u(t) - \bar{u}(t) \right\|_H .$$

2. Функция $\phi\left[t,\theta(t),\beta\right]$ удовлетворяет условию Липшица по функциональному аргументу $\theta(t)$, т.е.

$$\left\| \phi\left[t,\theta(t),\beta\right] - \phi\left[t,\bar{\theta}(t),\beta\right] \right\|_H \le \phi_0 \left\| \theta(t) - \bar{\theta}(t) \right\|_H .$$

3. Имеет место неравенство:

$$\gamma = 2T\sqrt{T} \sqrt{\tilde{M}\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + 1 + 2M_0 \right)\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + 1 \right)} \left\| g(x) \right\|_H^2 < 1.$$

Тогда операторное уравнение (24) имеет единственное решение $H(Q)$.

Решение уравнения (24) может быть найдено методом последовательных приближений [5] по формуле

$$\theta_n = K\left[\theta_{n-1}\right],\ n = 1,2,3,...$$

где $\theta_0(t)$ – произвольный элемент пространства $H(0,T)$ и при этом приближенное решение $\theta_n(t)$ удовлетворяет оценке

$$\left\|\overline{\theta}(t)-\theta_n(t)\right\|_H \le \frac{\gamma^n}{1-\gamma}\left\|K[\theta_0]-\theta_0\right\|_{H(0,T)},$$

где $\overline{\theta}(t)$ – точное решение уравнения (24).

Далее, подставив $\overline{\theta}(t)$ в (22), решение нелинейного интегрального уравнения (23) находим по формуле:

$$u^0(t)=\phi\left[t,\overline{\theta}(t),\beta\right].$$

Литература

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 736 с.
2. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М:. Наука, 1978. – 464 с.
3. *Краснов М.Л*. Интегральные уравнения. – М.: Наука, 1975. – 304 с.
4. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. Т. II. – М.: Физматгиз, 1963. – 516 с.
5. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1995. – 520 с.
6. *Керимбеков А.* Нелинейное оптимальное управление колебаниями в линиях передач. – Бишкек: Изд-во КРСУ, 2008 – 132 с.
7. *Kerimbekov A*. On the solvability of the elastic oscillations nonlinear optimization // Modern problems of applied mathematics and information technologies – al khorezmiy, 2009. – Tashkent, 2009. – P.81–82.