УДК 519.95 (575.2) (04)

ВЫСОКОТОЧНЫЙ АЛГОРИТМ ФАКТОРИЗАЦИИ МАТРИЧНОГО ПОЛИНОМА ОТНОСИТЕЛЬНО ЕДИНИЧНОЙ ОКРУЖНОСТИ

Н.И. Велиева, Л.Ф. Агамалиева

Приводится высокоточный алгоритм факторизации полинома относительно единичной окружности. Реализация этого алгоритма не требует нахождения нулей полинома. Факторизация матричного полинома относительно единичной окружности сводится к построению решения дискретного матричного алгебраического уравнения Риккати. С помощью метода сигнум функции создан высокоточный алгоритм для решения дискретного алгебраического уравнения Риккати (ДАУР).

Ключевые слова: факторизация полиномов; дискретное матричное алгебраическое уравнение Риккати; матричная сигнум-функция.

1. Постановка задачи.

Пусть задан матричный полином

$$B(z) = B_0 z^n + B_1 z^{n-1} + \ldots + B_{n-1} z + B_n + B'_{n-1} z^{-1} + \ldots + B'_0 z^{-n}\,, \qquad (1)$$

где $B_n = B'_n > 0$.

Необходимо факторизовать (1), т.е. определить такую матрицу $m \times m$ размерности $H(z)$, чтобы выполнилось условие:

$$B(z) = H_*(z) \cdot H(z)\,. \qquad (2)$$

Здесь * – означает операцию транспонирования и замену z на z^{-1} т.е. $H_*(z) = H'(z^{-1})$. $H^{-1}(z)$ не имеет полюсов внутри единичного круга.

Решение задачи (2) имеет вид [3]:

$$H(z)=(\Gamma' S\Gamma)^{1/2}+(\Gamma' S\Gamma)^{-1/2}\Gamma' S\Psi N_R(z), \tag{3}$$

где

$$\Psi=\begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ E_m & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & E_m & \dots & 0 & 0\\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & E_m & 0\end{bmatrix},\quad \Gamma=\begin{bmatrix}E_m\\ 0\\ .\\ .0\end{bmatrix},\quad N_R(z)=\begin{bmatrix}E_m z\\ E_m z^2\\ .\\ E_m z^{n+1}\end{bmatrix}, \tag{4}$$

матрица S является решением ДАУР.

$$S=\Psi' S\Psi-\Psi' S\Gamma(\Gamma' S\Gamma)^{-1}\Gamma' S\Psi+R, \tag{5}$$

где

$$R=\begin{bmatrix}\frac{1}{n+1}B_n & B_{n-1} & B_{n-2} & \dots & B_1 & B_0\\ B_{n-1} & \frac{1}{n+1}B_n & 0 & \dots & 0 & 0\\ B_{n-2} & 0 & \frac{1}{n+1}B_n & \dots & 0 & \frac{1}{n+1}B_n\end{bmatrix}. \tag{6}$$

Выбирается такое решение уравнения (5), чтобы собственные значения матрицы $(\Psi-\Gamma(\Gamma' S\Gamma)^{-1}\Gamma' S\Psi)$ находились внутри единичного круга. Для решения уравнения (5) описан алгоритм, который для своей реализации позволяет использовать процедуры Symbolic Toolbox пакета MATLAB, т.е. находить решение (5) с высокой точностью. Для этого использован метод матричной сигнум-функции. Опишем этот метод.

2. Метод матричной сигнум-функции.

Матричная сигнум-функция определяется следующим алгоритмом [2].

Алгоритм 1.

Дана матрица A размерности $n\times n$.

Предположим $z_0=A$.

При $k=0,1,2,\dots$ вычисляется

$$c=\left|\det z_k\right|^{\frac{1}{n}};\qquad z_{k+1}=\frac{1}{2e}\left(z_k+c^2 z_k^{-1}\right).$$

4. $\|z_{k+1}-z_k\|<\varepsilon$, $\varepsilon-$ заданная точность. $\|\cdot\|$ – норма матрицы.

3. Высокоточный алгоритм решения ДАУР с помощью матричной сигнум-функции.

Для решения ДАУР

$$S=\Psi' S\Psi-\Psi' S\Gamma(C+\Gamma' S\Gamma)^{-1}\Gamma' S\Psi+R$$

существуют разные вычислительные методы [1, 4, 5, 7, 8]. Это метод Шура [8], метод матричной сигнум-функции [4, 7], метод с использованием дискретного соотношения Басса [9] и др. Здесь рассмотрен случай, когда в ДАУР входящие матрицы вырожденны (Ψ^{-1} и C^{-1} не существуют).

Алгоритм 2.

1. Даны входные матрицы $\Psi;\Gamma;R$;

2. Вычисляется матрица $\bar{C}=(\Gamma' R\Gamma)^{-1}$.

3. Определяются $L=(E-\Gamma\bar{C}\Gamma' R)$; $G=\Gamma\bar{C}\Gamma'$, где E – единичная матрица соответствующий размерности.

4. $A=\begin{bmatrix}L\Psi & 0\\ R & -E\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}L & G\\ 0 & -\Psi'\end{bmatrix}.$

5. $M=(A-B)^{-1}(A+B)$.

6. Вычисляется матричная сигнум-функция по алгоритму 1.

7. $M=\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}=signM$; $D=\begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{22}+E \end{bmatrix}$; $\hat{E}=\begin{bmatrix} M_{11}+E \\ M_{21} \end{bmatrix}$.

8. Искомое решение определяется из соотношений $S=(D'D)^{-1}D'\hat{E}$.

Отметим, что реализация вычисления формул, указанных в алгоритмах в среде MATLAB Symbolic Toolbox является исключительно простой, но операция нахождения нормы отсутствует в пакете Symbolic Toolbox, при вычислении норм, в начале, в символьном виде находятся $z_{k+1}-z_k$, далее переходят к вычислениям с использованием обычной арифметики, а потом вычисляются значения норм этих выражений.

Для иллюстрации приведенного алгоритма рассмотрим следующий пример.

Пример 1. Пусть фигурирующие в (5) матрицы имеют вид:

$$\Psi=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad \Gamma=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad R=\begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

На этом примере сравним точность описанных выше алгоритмов. В качестве исходной оценки выберем оценку точности стандартной процедуры MATLAB dare.m. Найденное решение с использованием dare.m обозначим S_M, а с использованием алгоритма 2 обозначим S_A. Вычислим соответствующие невязки:

$$\varepsilon_m=\left|S_M-\Psi'S_M\Psi+\Psi'S_M(\Gamma'S_M\Gamma)-R\right|=0.15673591,$$

$$\varepsilon_A=\left|S_A-\Psi'S_M\Psi+\Psi'S_A(\Gamma'S_A\Gamma)-R\right|=1.41063\cdot 10^{-16}.$$

Сравнивая эти величины ε_M и ε_A можно констатировать, что в данном примере точность предлагаемого алгоритма не хуже точности стандартной процедуры пакета MATLAB dare.m.

С использованием процедур арифметики произвольной точности, все вычисления проводились с 32-значащими цифрами.

Таким образом, для факторизации матричного полинома предлагается следующий алгоритм.

Алгоритм 3.

Заданы матрицы $B_0, B_1, ..., B_n$.

Формируются матрицы $\Psi, \Gamma.R$ согласно (4), (6).

Решается уравнение (5) и согласно алгоритму 2 находим решение *S*.

С помощью разложения Холецкого матрицы $\Gamma'S\Gamma$ вычисляется матрица *L*. При этом использована стандартная процедура пакета MATLAB chol.m., которая поддерживает символьное вычисление.

Согласно (3) формируется полиномиальная матрица $H(z)$.

Для иллюстрации эффективности предлагаемого алгоритма рассмотрим следующий пример.

Пример 2. Пример взят из [10:158]

Задан полином:

$$B(z)=-2z^2-2z+9-2z^{-2}-2z^{-1}.$$

Факторизовав, получим следующий полином

$$H(z)=-0.73201z^2-z+2,7321.$$

Коэффициенты полинома, полученного в результате перемножения $H_*(z)$ и $H(z)$, отличаются от исходного в 26-ом знаке.

Изложенные примеры подтверждают, что результат, полученный при символьном вычислении, дает более высокую точность.

Авторы выражают глубокую благодарность Академику Ф. Алиеву за ценные советы.

Литература

1. *Varga A*. On computing High Accuracy solutions of a class of Riccati equations // Control-Theory and Advanced Technology. – 1995. – V.10. – №4. – Part 5. – P. 2005–2016.
2. *Larin V.B*. High-accuracy algorithms for solution of Discrete Periodic Riccati Equations // Appl. and Computational Math., and Inter. Journal. –2007. – V.6. – №1. – P. 10–18.
3. *Алиев Ф.А., Бордюг Б.А., Ларин В.Б., Шабанов М.Б.* Частотные методы синтеза оптимальных регуляторов. Препринт АН Аз.ССР, Ин-т Физики. – Баку, 1989. – 90 с.
4. *Aliev F.A., Larin V.B.* Optimization of linear control systems. Analytical Methods and Computational Algorithms. – Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 1998. – 261 p.
5. *Aliev F.A., Larin V.B*. Parameterizations of feasible solutions in Problems of Control and Signal Filtering (survey) // Apll. Comput. Math. – 2007. – №2. – P. 126–143.
6. *Велиева Н.И., Раджабов М.Ф., Агамалиева Л.Ф.* Высокоточные алгоритмы факторизации полиномов и сепарации дробно-рациональных выражений // Докл. НАН Азербайджана. – 2009. – №1. – С. 29–37.
7. *Kenney C.S., Laub A.J.* The matrix sign function // IEEE Trans. Autom.Contr. – 1995. – V.2. – №8. – P. 1330–1348.
8. *Laub A.A*. Schur method for solving the algebraic Riccati equation // IEEE Trans.Autom.Control. – 1979. – P. 913–921.
9. *Алиев Ф.А*. Методы решения прикладных задач оптимизации динамических систем. – Баку: Элм, 1989. – 320 с.