УДК 519.6 (575.2) (04)

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ЭРМИТОВЫХ СПЛАЙН-ВЕЙВЛЕТОВ

Д.А. Турсунов, Э.А. Эшаров, А.Т. Бекмуратов

Используется новый тип эрмитовых кубических сплайн-вейвлетов для построения приближенного решения интегро-дифференциальных уравнений. Вейвлеты построены в базисе эрмитовых кубических сплайнов. Численные результаты демонстрируют преимущество построенных базисных вейвлетов.

Ключевые слова: Вейвлет; эрмитов кубический сплайн; интегро-дифференциальное уравнение.

Введение. Недостатком построенных ранее вейвлетов является то, что они либо не имеют аналитического представления, либо расположены на достаточно широком носителе. И то, и другое бывает чрезвычайно важно при их использовании для приближенного решения интегро-дифференциальных уравнений. Все обозначения те же, что и в работе [1].

Пусть ϕ_1 и ϕ_2 кубические сплайны вида:

$\phi_1(x)=(x+1)^2(1-2x)\,\chi_{[-1,0]}(x)+(1-x)^2(1+2x)\chi_{[0,1]}(x)$ и

$\phi_2(x)=(x+1)^2x\chi_{[-1,0]}(x)+(1-x)^2x\chi_{[0,1]}(x)$, где $\chi_{[a,b]}(x)$ – характеристическая функция, $\chi_{[a,b]}(x)=1$, при $x\in[a,b]$ и $\chi_{[a,b]}(x)=0$, при $x\notin[a,b]$.

В работе [2] Дамен и др. построили биортогональные мультивейвлеты в базисе эрмитовых кубических сплайнов ϕ_1 и ϕ_2. Отметим, что их конструкция базисных вейвлетов выглядит слишком сложно.

В [1] мы предлагали новый подход к построению базисных вейвлетов на пространстве эрмитовых кубических сплайнов. В отличие от полуортогональных вейвлетов Чуи и Вонга эти вейвлеты ортогональны со скалярным произведением $\langle u',v'\rangle$, а не $\langle u,v\rangle$. Это требование ортогональности лучше подходит для применения вейвлетов к численному решению интегро-дифференциальных уравнений второго порядка. Вдобавок, эти вейвлеты имеют меньший носитель.

Нетрудно заметить, что множество

$$\Phi_n:=\{\phi_1(2^n\cdot-j): j=1,\ldots,2^n-1\}\cup\{\phi_2(2^n\cdot-j)|_{(0,1)}: j=0,\ldots,2^n\}, \quad (1)$$

является базисом для V_n. Элементы Φ_n обозначим через $\{v_1,\ldots, v_{2^{n+1}}\}$.

Пусть Ψ_n множество вейвлетов, которые пока не конкретизируются:

$$\Psi_n:=\{\psi_1(2^n\cdot-j): j=1,\ldots,2^n-1\}\cup\{\psi_2(2^n\cdot-j)|_{(0,1)}: j=0,\ldots,2^n\}, \quad (2)$$

и W_n – линейное пространство, натянутое на Ψ_n, очевидно, что $\dim(W_n)=2^{n+1}$. В работе [1] мы доказали равенство

$$\int_0^1 w'(x)v'(x)dx=0,\ \forall w\in\Psi_n,\ \forall v\in\Phi_n\ . \quad (3)$$

Из этого следует, что $V_n\cap W_n=\{0\}$. Кроме того, будет показано, что $V_{n+1}\supseteq V_n+W_n$ и $\dim(V_{n+1})=\dim(V_n)+\dim(W_n)$. Это означает, что $V_{n+1}=V_n\oplus W_n$. Следовательно, мы получим разложение $H_0^1(0,1)$: $H_0^1(0,1)=V_1\oplus W_1\oplus W_2\oplus\ldots$.

Элементы Ψ_n обозначим через $\Psi_n=\{w_{2^{n+1}},\ldots, w_{2^{n+2}}\}$, $n\in N$.

Пусть $g_k:=v_k/\|v'_k\|_2$ при $k=1,2,3,4$ и $g_k:=w_k/\|w'_k\|_2$ при $k>4$. Тогда $\|g'_k\|_2=1$ при $n\in\mathbf{N}$.

Сплайн-вейвлеты. ϕ_1 и ϕ_2 – кубические сплайны, определенные во введении удовлетворяют условиям: $\phi_1, \phi_2\in C^1$, $\phi_1(0)=1$ $\phi'_1(0)=0$, $\phi_2(0)=0$ $\phi'_2(0)=1$.

Следовательно, эрмитова интерполяция для функции $f\in C^1(\mathbf{R})$ имеет следующий вид:

$u=\sum_{j\in Z} f(j)\phi_1(\cdot-j)+f'(j)\phi_2(\cdot-j)$, $\forall j\in Z$: $u(j)=f(j)$, $u'(j)=f'(j)$.

Пусть S представляет собой инвариантное пространство сдвигов, порожденное ϕ_1 и ϕ_2. Функция g принадлежит пространству S тогда и только тогда, когда существуют две последовательности b_1, b_2 на $\mathbf{Z}$, для которых выполняется равенство: $g=\sum_{j\in\mathbf{Z}}\left[b_1(j)\phi_1(\cdot-j)+b_2(j)\phi_2(\cdot-j)\right]$.

Пусть $S_1=\{g(2\cdot): g\in S\}$, тогда $S\subset S_1$. Мы ищем пространство вейвлетов W, для которого $S_1=S\oplus W$. При этом мы хотим найти два вейвлета ψ_1, ψ_2, так что их сдвиги порождают W. Кроме того, мы потребуем выполнение равенств

$\langle\psi'_1, \phi'_m(\cdot-j)\rangle=\langle\psi'_2, \phi'_m(\cdot-j)\rangle=0$, $m=1,2$, $\forall j\in\mathbf{Z}$. (4)

Отсюда имеем два материнских вейвлета ψ_1, ψ_2:

$\psi_1(x)=-2\phi_1(2x+1)+4\phi_1(2x)-2\phi_1(2x-1)-21\phi_2(2x+1)+21\phi_2(2x-1)$,

$\psi_2(x)=\phi_1(2x+1)-\phi_1(2x-1)+9\phi_2(2x+1)+12\phi_2(2x)+9\phi_2(2x-1)$.

Носителями построенных вейвлетов ψ_1, ψ_2 является отрезок $[-1,1]$, они удовлетворяют условию (4), и их сдвиги генерируют пространство вейвлетов W, так что S_1 является прямой суммой S и W. Кроме, того ψ_1 – симметричен, а ψ_2 – антисимметричен.

Вейвлеты на отрезке. Построим вейвлет-базис в пространстве $H_0^1(0,1)$. Допустим $v\in V_1$ и $w_n\in W_n$ при $n\in\mathbf{N}$. Мы доказали, что $\forall n\in\mathbf{N}$: $\langle v',w'_n\rangle=0$, $\langle w'_m,w'_n\rangle=0$, $m\neq n$. Отсюда,

$$\left\|v'+\sum_{n=1}^{\infty}w'_n\right\|^2_{L_2(0,1)}=\|v'\|^2_{L_2(0,1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\|w'_n\|^2_{L_2(0,1)} \qquad (5)$$

Пусть $\psi_{n,j}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{729.6}}2^{-n/2}\psi_1\left(2^n x-\dfrac{j}{2}\right)$, при $j=2,4,...,2^{n+1}-2$, (6)

$$\psi_{n,j}(x)=\frac{1}{\sqrt{153.6}}2^{-n/2}\psi_2\left(2^n x-\frac{j-1}{2}\right),\ \text{при}\ j=3,5,...,2^{n+1}-1,$$

$$\psi_{n,1}(x)=\frac{1}{\sqrt{76.8}}2^{-n/2}\psi_2\left(2^n x\right),\ \psi_{n,2^{n+1}}(x)=\frac{1}{\sqrt{76.8}}2^{-n/2}\psi_2\left(2^n x-2^n\right),$$

$$\left.\begin{aligned}&\phi_{1,1}(x)=\sqrt{\frac{5}{24}}\phi_1(2x-1),\quad \phi_{1,2}(x)=\sqrt{\frac{15}{4}}\phi_2(2x),\\ &\phi_{1,3}(x)=\sqrt{\frac{15}{8}}\phi_2(2x-1),\quad \phi_{1,4}(x)=\sqrt{\frac{15}{4}}\phi_2(2x-2).\end{aligned}\right\}\ \text{при}\ n\in\mathbf{N}\ \text{и}\ x\in(0,1).$$

Ясно, что V_1 разлагается на $\phi_{1,j}$, $j=1,2,3,4$. Следовательно $H_0^1(0,1)$ разлагается на g_j, $j=1,\dots,2^{2n+1}$, где $g_j=\phi_{1,j}$, при $j=1,\dots,4$, и $g_{2^{n+1}+j}=\psi_{n,j}$, $n\in\mathbf{N}$, $j=1,\dots,2^{2n+1}$.

В работе [1] доказано, что $\left(\psi'_{n,j}\right)_{n\in N,1\le j\le 2^{n+1}}$ является базисом Рисса в $L_2(0,1)$.

Аналогично доказывается, что $(g'_{k,j})_{k\in\mathbf{N}}$ является базисом Рисса в $L_2(0,1)$.

Применение. В этом разделе мы используем построенные вейвлеты для решения интегро-дифференциальных уравнений вида:

$$-\frac{d^2u}{dx^2}+p(x)\frac{du}{dx}+q(x)u(x)+\int_0^x K(x,s)u(s)ds=f(x),\ \ 0<x<1, \qquad (7)$$

с граничным условием $u(0)=u(1)=0$, (8)

где $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$, $K(x,s)$ – заданные непрерывные функции. Коэффициенты и ядро $K(x,s)$ уравнения (7) удовлетворяют условиям:

$0\le p(x)\le c_3$, $0\le q(x)\le c_4$, $0\le K(x, s)\le c_5$, $x\in[0,1]$, $s\in[0,1]$. (9)

Пусть $a(u,v)$ обозначает билинейную форму, $u,v\in H_0^1(0,1)$:

$$a(u,v)=\int_0^1 u'(x)v'(x)dx+\int_0^1 p(x)u'(x)v(x)dx+\int_0^1 q(x)u(x)v(x)dx+\int_0^1\int_0^x K(x,s)u(s)u(x)dsdx.$$

Тогда вариационная запись (7)–(8) имеет следующий вид:

$a(u,v)=\langle f,v\rangle,\ \forall v\in H_0^1(0,1)$.

Соответствующая задача аппроксимации Галеркина: найти $u_n\in V_n$, при котором

$a(u_n,v)=\langle f,v\rangle\ \forall v\in V_n$. (10)

По лемме Лакса–Милграмма (см. 3:60) задача (10) имеет единственное решение. Мы предлагаем использовать найденное выше множество вейвлетов $G=\{g_1,\dots,g_{2^{n+1}}\}$ как базис для V_n. С этим базисом для V_n задача (10) может быть дискретизирована следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} a(g_j,g_k)c_k=\langle g_j,f\rangle,\qquad j=1,\dots,2^{n+1}.$$

Число обусловленности матрицы A_n равномерно ограничено $A_n=(a(g_j,g_k))_{1\le j,k\le 2^{n+1}}$. Ниже мы рассматриваем применение базисных вейвлетов G_n к двум примерам.

Пример 1. $-u''+\cos(t)\int_0^t u(s)ds=\pi^2\sin(\pi t)-\dfrac{\cos t}{\pi}(\cos(\pi t)-1),\quad u(0)=u(1)=0$.

Точное решение $u(t)=sin(\pi t)$,

численное решение $u_{16}(t)=2.2g_1(t)+0.833g_2(t)-9.716\times10^{-8}g_3(t)-0.833g_4(t)-0.02g_5(t)-0.036g_6(t)+6.236\times10^{-7}g_7(t)+0.02g_8(t)-1.325\times10^{-3}g_9(t)-3.819\times10^{-3}g_{10}(t)-1.323\times10^{-3}g_{11}(t)-5.399\times10^{-3}g_{12}(t)+3.017\times10^{-7}g_{13}(t)-3.818\times10^{-3}g_{14}(t)+1.325\times10^{-3}g_{15}(t)+1.325\times10^{-3}g_{16}(t)$;

$\|u(t)-u_4(t)\|_2=2.389\times10^{-3}$, $\|u(t)-u_8(t)\|_2=2.092\times10^{-4}$, $\|u(t)-u_{16}(t)\|_2=1.291\times10^{-5}$,

$C(A_4)=1.667$; $C(A_8)=2.342$, $C(A_{16})=3.205$.

Пример 2. $-u''+u'+\int_0^t t\cdot s\cdot u(s)ds=t^6/5-t^5/2+t^4/3+3t^2-10t+5,\quad u(0)=u(1)=0$.

Точное решение $u(t)=t^3-2t^2+t$,

численное решение

$u_8(t)=0.274g_1(t)+0.258g_2(t)-0.091g_3(t)+8.235\times10^{-8}g_4(t)+1.288\times10^{-8}g_5(t)+4.203\times10^{-8}g_6(t)+$
$+6.973\times10^{-8}g_7(t)+1.433\times10^{-10}g_8(t)$;

$\|u(t)-u_4(t)\|_2=1.817\times10^{-8}$, $\|u(t)-u_8(t)\|_2=1.874\times10^{-8}$, $\|u(t)-u_{16}(t)\|_2=3.189\times10^{-8}$

$C(A_4)=1.684$; $C(A_8)=2.338$, $C(A_{16})=3.202$,

где $\|u(t)-u_n(t)\|_2=\sqrt{\int_0^1 (u(t)-u_n(t))^2}$ – норма разностей, $C(A_n)$ – число обусловленности матрицы A_n.

Литература

1. *Турсунов Д.А., Губская М.М.* Построение новых типов эрмитовых кубических сплайн-вейвлетов // Молодежная науч. конф., 9–13 окт. 2009 г. – Томск, 2009. – С. 10–15.
2. *Dahmen W., Han R,Q.* Jia and Kunoth A. Biorthogonal multiwavelets on the interval: Cubic Hermite splines // Constr. Approx. 16 (2000). – P. 221–259.
3. *Brenner S.C., Scott L.R.* The Mathematical Theory of Finite Element Methods. – Springer, New York, 1994.