УДК 539.3 539.115; 539.374 (575.2) (04)

СИНЕРГЕТИКА В МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА

Я.И. Рудаев, Д.А. Китаева

Рассматриваются представления о теории неравновесного хаоса применительно к механическим процессам. Приведены конкретные примеры моделирования с привлечением положений синергетики.

Ключевые слова: нелинейная механика; синергетика; фазовый портрет; аттрактор; сверхпластичность.

Возможность предсказывать воспринималась ранее как удел мудрецов и одна из основных целей развития науки. Предсказание жрецами солнечных и лунных затмений считалось чудом.

Ситуация коренным образом изменилась после математической формулировки законов природы. Оказалось, что движение небесных тел можно изучить, проинтегрировав соответствующие дифференциальные уравнения. Они могли быть достаточно сложными и требовали для своего решения и исследования больших усилий, изобретательности, создания новых математических инструментов. Но, в принципе, это всегда можно было сделать. Возникла большая область исследований, где можно рассчитывать на научный прогноз.

Замечательный французский математик Пьер Симон Лаплас полагал, что главной задачей будущей и современной науки является получение следствий из законов Ньютона. Возникновение Ньютоновской системы во многом обусловлено крушением феодализма, которому отвечало "неравновесное состояние" социальной среды. Основой Ньютоновской концепции стал детерминистический подход и линейная модель системы. С математической стороны линейный подход связан с теоремой единственности и принципом суперпозиции. Теоремой единственности утверждается, что начальные и граничные условия полностью определяют дальнейшее поведение системы, а принципом суперпозиции предполагается, что эффект нескольких воздействий представляет собой сумму эффектов этих же воздействий. Но такая теория была уже не актуальна, ибо появились термодинамика и статистическая механика, и в естественных науках – необратимость. Стала понятной возможность частичного возвращения к исходному состоянию и невозможность построения вечного двигателя.

Работы по динамическому хаосу показали, что парадоксальными свойствами, которые по существу только начинают изучаться, обладают объекты, описываемые классической механикой.

В современной трактовке синергетику следует рассматривать как подход для изучения необратимого динамического хаоса.

В общем потоке синергетических исследований можно выделить несколько ветвей. Наиболее известно направление, связанное с работами Брюссельской школы неравновесной термодинамики И.Р. Пригожина [13], где основное значения придается не характерному для синергетики понятию энтропия. Соответственно анализ устойчивости фазовой траектории заменяется анализом термодинамической устойчивости, отождествляя для околоравновесной системы избыточное производство энтропии с функцией Ляпунова. В случае системы, далёкой от термодинамического равновесия, такое отождествление оказывается невозможным. В центре внимания Брюссельской школы находятся открытые стационарные системы. Отсюда интерес этой школы к стационарным неравновесным состояниям термодинамических систем и к диссипативным структурам, под которыми понимаются упорядоченные структуры, возникающие и сохраняющиеся в открытых системах благодаря обмену энергий и веществом со средой.

Представляя собой одно из крупнейших направлений, Брюссельская школа не является, тем не менее, центральной. Она продолжает исследования Лоренца – Рюэля, Такенса – Мандельброта – Хакена и связана с анализом фазовой структуры необратимой статистической системы. В общем случае эта структура есть суперпозиция областей детерминированного и стохастического движений. Все отличие необратимого хаоса от обратимого обусловлено различием областей стохастического движения, т.е. стохастических аттракторов, называемых странными.

Таким образом, проблема необратимости и связанная с ней задача прогнозирования с полным основанием может быть отнесена к числу важнейших задач.

Сформулируем основные признаки новой области механики, называемой нелинейной динамикой (синергетикой) по сравнению с классическими представлениями.

Предполагалось, что имеются два класса объектов: **детерминированные**, **стохастические**. Последними занимается теория вероятностей. Иными словами, это не детерминированный прогноз, а статистические характеристики – средние значениями, дисперсии, распределение вероятностей.

В последние годы было показано, что есть ещё один важный класс объектов. Формально их можно отнести к детерминированным – точно зная их текущее состояние, можно установить, что произойдёт с системой в сколь угодно далёком будущем. Вместе с тем предсказывать её поведение можно лишь в течение ограниченного времени. Даже небольшая неточность в определении начальных условий нарастает со временем и теряется возможность предсказывать будущее. В это время система ведёт себя хаотически, и речь может идти лишь о статистическом моделировании. В механике существует много примеров, в которых возможности предсказания ограничены. Однако в некоторых случаях осознанный барьер помогает увидеть истинный масштаб стоящих проблем.

В 1963 г. мысль об ограниченности способности предсказания, даже в мире, описываемым классической механикой, была высказана лауреатом Нобелевской премии Р. Фейнманом. То, что чувствительность к начальным данным ведет к хаосу, понял также в 1963 г. американский метеоролог Э. Лоренц. Им была предложена простейшая модель в виде системы трёх дифференциальных уравнений, описывающая конвекцию воздуха. Модель была просчитана на компьютере, а автор сумел понять, что имеет дело не с ошибками вычислений, а с открытием динамического хаоса. С точки зрения математики, можно считать, что любая модель динамической системы описывает движение точки в пространстве, называемым фазовым. Важнейшая особенность этого пространства – размерность, т.е. количество чисел, необходимых для определения состояния системы.

Математический образ детерминированных непериодических процессов, для которых невозможен долгосрочный прогноз, назвали **странными аттракторами**.

На первом этапе развития теории динамического хаоса большую роль сыграла теория устойчивости динамических систем, которая связана с именами А. Пуанкаре, А.М. Ляпунова, А.А. Андронова, Э. Хопфа и др. Следующим этапом в развитии динамического хаоса можно считать теорию возмущения, завершающуюся формулировкой КАМ–теоремы (теоремы Колмогорова – Арнольда – Мозера).

Следует оговориться, что теория устойчивости динамических систем и теория возмущений носят в основном качественный характер. Поэтому при рассмотрении конкретных систем теория динамического хаоса в настоящее время использует вычислительный эксперимент [1], с которым связан третий этап в ее развитии. Пионерским при этом считается исследование [2], давшее первое представление о картине хаоса в обратимой динамической системе. Последующие результаты [3–5] лишь уточняли детали этой картины. Вычислительные эксперименты подтвердили полученный [6] фундаментальный вывод о том, что динамический хаос может быть только в нелинейных системах. Объяснив средствами вычислительного эксперимента появление из уравнений динамики стохастического движения, теория динамического хаоса ликвидировала противоречие между динамикой и статистической механикой. Иными словами, установлен переход от регулярного движения к стохастическому из-за появляющейся в определенных случаях неустойчивости фазовых траекторий.

Недостаточно четкое разделение обратимого и необратимого хаоса отражается на аттракторах, т.е. множествах точек в фазовом пространстве системы, к которым притягиваются соседние траектории. Все наблюдаемое движение динамической системы происходит на аттракторах. Поэтому при анализе обратимости или необратимости движения фазу втягивания траектории в аттрактор принимать во внимание не следует.

Уже отмечалось, что в фазовом пространстве диссипативных динамических систем движениям отвечают странные аттракторы. Они могут быть не только простыми как неподвижные точки, замкнутые траектории и торы, но и стохастическими “клубками” траекторий [1]. Термин странный аттрактор впервые появился в [7]. Здесь, зная о существовании статьи [8], рассматривалось тоже явление возникновения турбулентности в вязкой несжимаемой жидкости, описываемой уравнениями Навье – Стокса и подвергаемой нагреванию. С привлечением аппарата теории множеств [7] продемонстрирована возможность возникновения специфических так называемых странных аттракторов – сложно устроенных множеств. Странные аттракторы позднее были [9] отождествлены с фракталами – множествами, размерность которых отличается от обычной, так называемой топологической размерности, выражаемой целым числом.

В качестве примера, иллюстрирующего поэтапное возникновение динамического хаоса с появлением странного аттрактора, рассмотрим деформационное поведение плотины Токтогульского гидроузла.

Гидротехнические сооружения, возводимые в сейсмических районах, являются чрезвычайно дорогостоящими объектами, даже частичное повреждение которых может привести к прорыву водохранилища и почти мгновенному затоплению населенных пунктов, промышленных предприятий и сельскохозяйственных угодий. Наличие сейсмических воздействий, нагрузок от инерционных сил, обусловленных индуцированной сейсмичностью, позволяет рассматривать массивные объекты типа плотин как динамические системы. При абстрагировании от конкретной физико-механической природы подобных объектов последние отождествляемы с динамическими системами, если возможно указать набор величин, называемых динамическими переменными и характеризующих состояние системы [10].

Сформулируем динамическую модель плотины Токтогульского гидроузла посредством введения в рассмотрение фазовых траекторий, определяемых дифференциальными уравнениями вида

$$\frac{d\Delta V}{dt} = f\left(\Delta V\right), \qquad (1)$$

при начальном условии

$$\Delta V\left(0\right) = \Delta V_0, \qquad (2)$$

где ΔV – перемещение; t – время.

Не останавливаясь на подробностях модели, заметим, что она дает возможность определить все аттракторы с указанием начальных данных, при которых на тот или иной аттрактор происходит выход. На рис. 1–7 представлены фазовые портреты одного из фрагментов плотины Токтогульской ГЭС. По оси абсцисс отложены составляющие перемещений вдоль створа, по оси ординат – скорости перемещений. Величину B назовем параметром скорости возрастания перемещений.

Пусть имеет место стационарное состояние фрагмента плотины. В соответствии с принятой классификацией [10] особая точка считается устойчивым узлом – все фазовые траектории стягиваются в одну точку, образуя аттрактор (рис. 1).

Полагаем, что скорость перемещения возрастает. По существу особая точка (рис. 2) отвечает становлению процесса хаотизации в форме мягкой потери устойчивости положения равновесия (бифуркации Хопфа). Дальнейшее увеличение скорости перемещения (рис. 3–6) приводит к формированию устойчивого цикла. Иными словами, подтверждается положение о том, что поведение фазовых кривых, близких к циклу, носит эволюционный характер, причем цикл отвечает положению равновесия.

Отметим, что представленные на рис. 1–7 графические зависимости позволяют проследить смену бифуркационных режимов. Здесь реализован сценарий [11] перехода от простых упорядоченных режимов, которым отвечают особые точки или предельные циклы, к хаотическому поведению (рис. 7) в диссипативных системах и формированию странных аттракторов. Укажем на чувствительность фазовых траекторий к начальным условиям.

Известно, что аттракторы имеют ключевое значение в теории бифуркаций, называемой часто исследовательской программой Анри Пуанкаре. Указанные аттракторы также рассматриваются как математические образы, но в отличие от странных аттракторов установившихся режимов. Более того, близкие к притягивающему множеству траектории из его области притяжения, стремятся к аттрактору (рис. 1–6). Поэтому, естественно, что их считают устойчивыми. Другими словами, особые точки и предельные циклы, наблюдаемые в динамических системах в форме аттракторов, являются устойчивыми траекториями.

С ростом приращения скорости перемещения можно наблюдать проявление физического явления, называемого в [1] динамическим хаосом.

Математическими образами возникновения хаотического поведения являются странные аттракторы, о которых упоминалось выше. Они описывают непериодические, хаотические режимы в динамических системах вида (1), (2). Странные аттракторы (рис. 7) не обладают свойством устойчивости, а задачи, связанные с их изучением, не могут считаться корректными [1].

Природа странных аттракторов обсуждалась многими исследователями. При этом доминирующими считаются два подхода к определению этого понятия. В соответствии с [7] странным считается аттрактор, имеющий размерность выше топологической. Интересно, что хаотичность здесь необязательна. Как следует из приведенного определения, могут существовать странные нестохастические аттракторы [12]. В рамках второго подхода странным является вся-

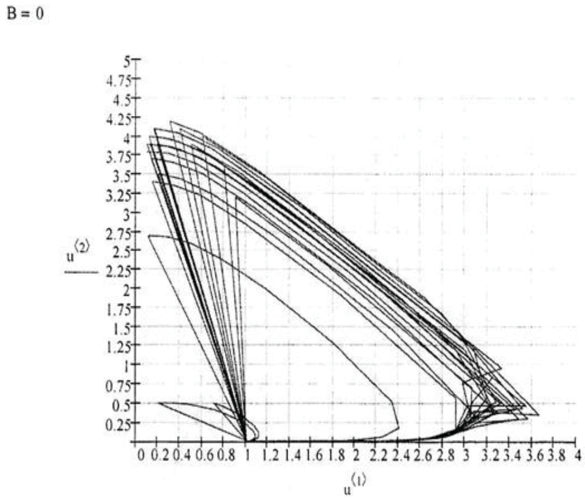

Рис. 1.

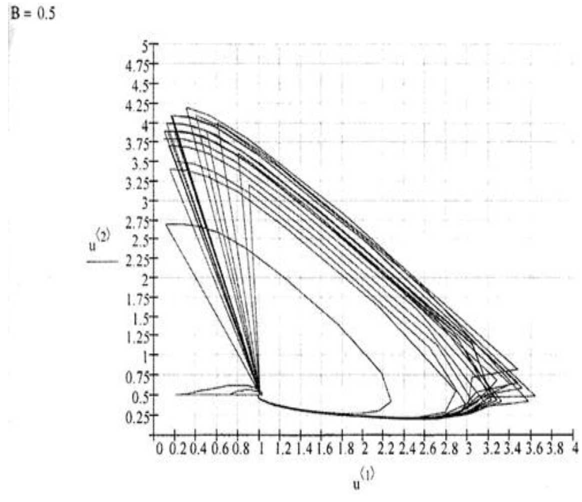

Рис. 2.

B=1.0

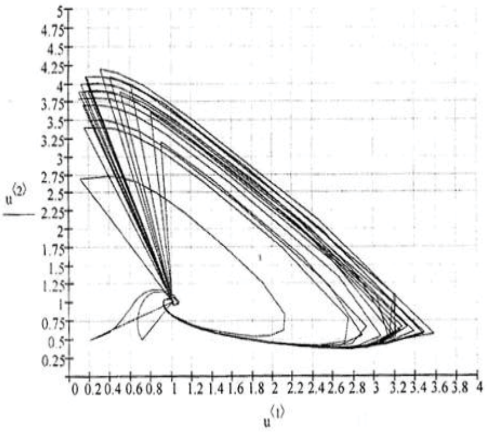

Рис. 3.

B=1.5

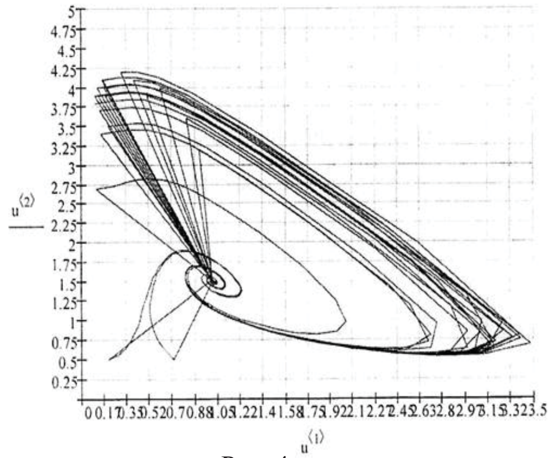

Рис. 4.

B=2.0

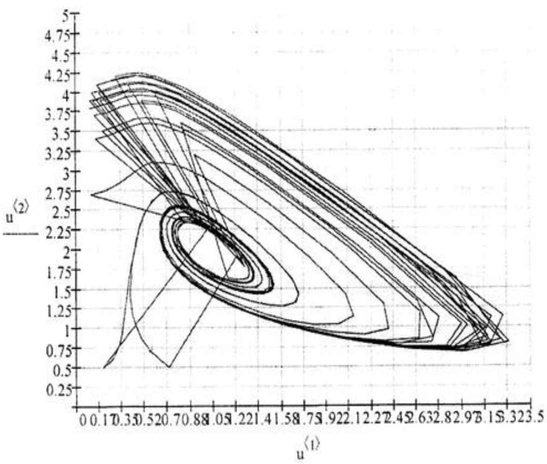

Рис. 5.

B=2.5

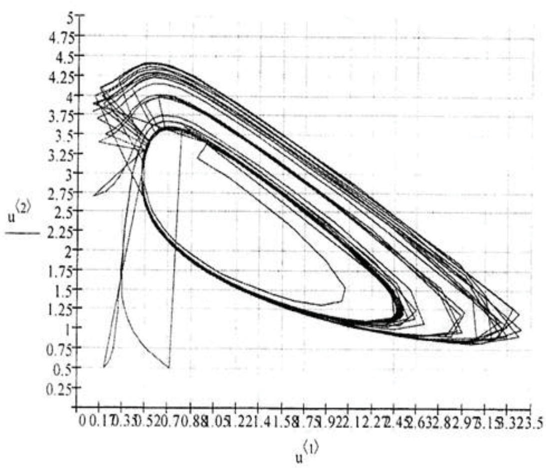

Рис. 6.

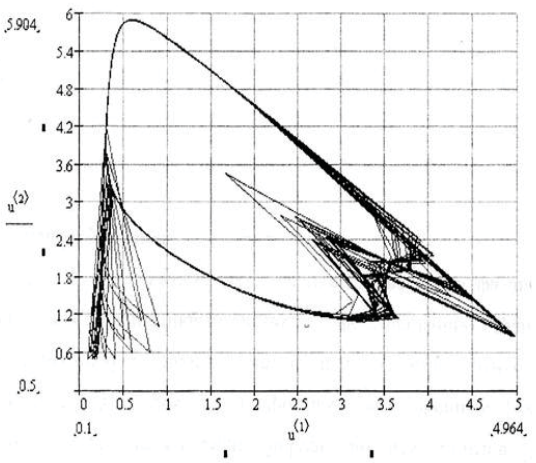

Рис. 7.

кий стохастический аттрактор [4]. Тенденцию к отождествлению стохастических и странных аттракторов можно связать с недостаточно четким разделением обратимого и необратимого хаоса.

В заключение обратим внимание на следующее. Выше приведён пример оценки устойчивости плотины Токтогульского гидроузла с помощью вычислительного эксперимента путём выхода на странный аттрактор.

При исследовании закономерностей высокотемпературной деформации металлов и сплавов установлено, что переходу материала в сверхпластическое состояние предшествует накопление некоторой начальной необратимой деформации. Следовательно, различной природы структурные превращения, в температурно-скоростных условиях которых наблюдается эффект сверхпластичности, наблюдаются в диссипативной среде. Иными словами, материалам становится свойственной иерархия структурных состояний, характерная для систем, находящихся вдали от термодинамического равновесия. Эти материалы можно рассматривать как незамкнутые неравновесные системы. При изучении динамики таких материалов вполне приемлемым оказался синергетический подход [14]. В рамках такого подхода к описанию экспериментальных данных по высокотемпературному деформированию промышленных алюминиевых сплавов был привлечен математический аппарат теории катастроф [15, 16].

Горные породы относятся к начально-неоднородным материалам. В соответствии с классификацией пространственно-временных диссипативных структур горные породы на больших глубинах могут считаться автоструктурами – локализованными пространственными образованиями, устойчиво существующими в диссипативных неравновесных средах. Именно поэтому процесс деформации и разрушения горных пород может рассматриваться как иерархия последовательных переходов из одного устойчивого состояния в другое. Приведенные рассуждения свидетельствуют о полезности привлечения методов теории катастроф к описанию равновесия и потери устойчивости горных пород [16, 17].

Литература

1. *Малинецкий Г.Г.* Математические основы синергетики. М.: КомКнига, 2005. 312 с.
2. *Henon M., Heiles C.* The applicability of the third integral of the motion. Some numarical experiments // Astron. j. 1964. Vol. 69. P. 73–79.
3. *Заславский Г.М.* Статистическая необратимость в нелинейных системах. М.: Наука, 1970. 143 с.
4. *Лихтенберг А., Либерман М*. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
5. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 240 с.
6. *Синай Я.Г.* К обоснованию эргодической гипотезы для одной динамической системы стохастической механики // ДАН СССР. 1963. Т. 153. С.167–192.
7. *Ruelle D., Takens F*. Of the nature of turbulence // Comm. Math. Phys. 1971. Vol. 20. P. 167–192.
8. *Lorenz E.N.* Deterministic nonperiodical flow // J. Atmosph. Sci. 1963. Vol. 20. P. 88–116.
9. *Mandelbrot B.B.* Les objects fractals. Form, hazard and dimension. P.: Flammarion, 1975. 192 p.
10. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. 356 с.
11. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 256 с.
12. *Grelogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J.* Strange attractors that are not chaotic // Physic. 1984. Vol. D. 13. P. 261–268.
13. *Пригожин И., Стенгерс И*. Порядок из хаоса. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 212 с.
14. *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1985. 405 с.
15. *Рудской А.И., Рудаев Я.И.* Механика динамической сверхпластичности алюминиевых сплавов. СПб.: Наука, 2009. 217 с.
16. *Китаева Д.А., Пазылов Ш.Т., Рудаев Я.И*. О приложениях методов нелинейной динамики в механике материалов // Математическое моделирование систем и процессов. 2007. №15. С. 46–70.
17. *Адигамов Н.С., Рудаев Я.И.* О самоорганизации структурообразования при деформировании горных пород // Геодинамика и напряженное состояние недр земли: Тр. междунар. конф. Новосибирск, 1999. С. 51–58.