

УДК 531.3 (575.2) (04)

ДЕФОРМАЦИИ ПЛАСТИНЫ, ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПО ДВУМ ПРОТИВОПОЛОЖНЫМ СТОРОНАМ ПРИ ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОПЕРЕЧНОМ УДАРЕ

В.Э. Еремьянц, Л.Т. Панова, А.А. Асанова

С использованием метода разложения колебаний пластины по собственным формам и частотам выведены расчетные зависимости для определения деформаций и напряжений на поверхности пластины при центральном поперечном ударе.

Ключевые слова: удар; пластина; деформация.

Настоящая работа является продолжением исследований, начатых авторами в работах [1–3], целью которых являлось обоснование рациональных параметров виброударных машин для очистки внутренних поверхностей трубопроводов, различных емкостей и пластин. Для этого необходимо знать взаимосвязь деформаций и напряжений на поверхности пластины с параметрами её ударного нагружения. В настоящей работе решалась задача вывода расчетных зависимостей, позволяющих установить эту взаимосвязь. Работа выполнялась при финансовой поддержке МО и Н КР, грант КР-04.

Для решения задачи использовался метод разложения колебаний пластины, возникающих при ударе, по собственным формам и частотам. При этом прогиб пластины в точке с координатами x, y описывался функцией [1]:

$$w(x, y, t) = \frac{1}{m_0} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{W_{ij}(x, y) W_{ij}(x_0, y_0)}{\iint_S W_{ij}^2(x, y) dx dy} \int_0^t P(\theta) \sin \omega_{ij}(t - \theta) d\theta \quad (1)$$

где $W_{ij}(x, y)$, ω_{ij} – соответственно собственные формы и частоты колебаний пластины; $P(\theta)$ – зависимость внешней силы, действующей на пластину, от времени; t – текущее время; x_0, y_0 – координаты точки приложения силы; m_0 – масса квадратного метра пластины, $m_0 = \rho \delta$, ρ – плотность материала пластины, δ – толщина пластины; S – площадь поверхности пластины.

При виброударной очистке поверхностей энергия удара передается от машины к обрабатываемой поверхности, в частности к пластине, через инструмент, представляющий собой упругий стержень, опирающийся на пластину.

В работе [2] найдено, что при ударе по упругому стержню с площадью поперечного сечения F жестким бойком массой m с податливой сферической ударной поверхностью зависимость усилий, действующих в контакте инструмента с пластиной, от времени описывается функцией:

$$P(\theta) = -B_0 \exp(-h\theta) [(g/\lambda) \sin(\lambda a\theta) - \cos(\lambda a\theta) + \exp(-ga\theta)] \quad (2)$$

где

$$B_0 = \frac{2bc_1V_0}{a(g^2 + \lambda^2)}, \quad b = \frac{c_2}{EF}, \quad \beta = \frac{c_2}{8a\sqrt{Dm_0}},$$

$$s = b + \beta, \quad g = s - h, \quad \lambda^2 = k^2 - h^2,$$

$$k^2 = \frac{c_1}{ma^2}, \quad h = \frac{c_1}{2EF}, \quad a - \text{ скорость распро-}$$

странения продольной волны в стержне; c_1, c_2 – приведенные коэффициенты жесткости контакта бойка со стержнем и стержня с пластиной, определяемые по линеаризованной В.Л. Бидерманом зависимости Герца для контакта сферы с плоскостью [4].

Собственные формы и частоты колебаний прямоугольной пластины постоянной толщины, защемленной по двум противоположным сторонам, исследовались в работе [3]. Там же дана оценка влияния граничных условий на двух других сторонах пластины на её собственные формы и частоты. При этом за начало координат x, y принимался центр пластины (рис. 1) и далее с использованием асимптотического метода находились формы колебаний. Эти формы с точно-

стью до постоянного множителя описываются функцией:

$$W_{ij}(x, y) = \cos(\gamma_{1j}x) \cos(\gamma_{2i}y) + \exp[-\alpha_{1ij}(0,5a_1 \pm x)] \cos(0,5\gamma_{1j}a_1) \cos(\gamma_{2i}y) + \Theta_{ij} \exp[-\alpha_{2ij}(0,5a_2 \pm y)] \cos(0,5\gamma_{2i}a_2) \cos(\gamma_{1j}x); \quad (3)$$

$i = 1, 2, 3, \dots; j = 1, 2, 3, \dots$

где a_1, a_2 – размеры сторон пластины по осям x и y ; $\gamma_1 = \pi / \Lambda_x, \gamma_2 = \pi / \Lambda_y, \Lambda_x, \Lambda_y$ – длины полу-волн вдоль соответствующих осей; знак минус в экспоненциальных функциях соответствует положительным направлениям осей x, y , а знак плюс – отрицательным.

$$\Theta_{ij} = \frac{v_{ij}^2 + \mu}{v_{ij}^2 + 2 - \mu}, \quad v_{ij} = \frac{\gamma_{2i}}{\gamma_{1j}},$$

$$\alpha_{1ij} = \sqrt{\gamma_{2i}^2 + \alpha_{ij}^2}, \quad \alpha_{2ij} = \sqrt{\gamma_{1j}^2 + \alpha_{ij}^2},$$

$$\alpha_{ij}^2 = \gamma_{1j}^2 + \gamma_{2i}^2, \quad \omega_{ij} = \alpha_{ij}^2 \sqrt{m_0 / D}. \quad (4)$$

Частотные уравнения имеют вид:

$$\operatorname{tg}(0,5\gamma_{1j}a_1) = -\sqrt{1 + 2v_{ij}^2}, \quad (5)$$

$$\operatorname{tg}(0,5\gamma_{2i}a_2) = -\Theta_{ij}^2 \sqrt{1 + (2/v_{ij}^2)}.$$

В работе [3] во втором уравнении (5) был опущен знак минус.

Дальнейшее решение частотных уравнений отличается от решения, изложенного в [3].

Для определения диапазонов возможных значений γ_{1j} и γ_{2i} выразим из первого частотного уравнения (5) параметр v_{ij} :

$$v_{ij} = \sqrt{0,5(\operatorname{tg}^2(0,5a_1\gamma_{1j}) - 1)}. \quad (6)$$

Из этого выражения видно, что для того чтобы коэффициент v_{ij} , а следовательно, и пара-

метры γ_{1j} и γ_{2i} были действительными числами, необходимо выполнение условия $\operatorname{tg}^2(0,5a_1\gamma_{1j}) > 1$, которое распадается на два условия:

$$\operatorname{tg}(0,5a_1\gamma_{1j}) > 1, \quad \operatorname{tg}(0,5a_1\gamma_{1j}) < -1.$$

Первому частотному уравнению (5) соответствует второе условие, которое выполняется в диапазонах изменения углов:

$$\frac{(2j-1)\pi}{2} < 0,5\gamma_{1j}a_1 < \frac{(4j-1)\pi}{4} \quad \text{или}$$

$$\frac{(2j-1)\pi}{a_1} < \gamma_{1j} < \frac{(4j-1)\pi}{2a_1}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

Эти диапазоны показаны на рис. 2а заштрихованными областями.

Для того чтобы удовлетворялось второе частотное уравнение (5) тангенс угла должен быть отрицательным, что соответствует изменению углов в диапазонах:

$$\frac{(2i-1)\pi}{2} < 0,5\gamma_{2i}a_2 < \pi i \quad \text{или}$$

$$\frac{(2i-1)\pi}{a_2} < \gamma_{2i} < \frac{2i\pi}{a_2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

Эти диапазоны показаны на рис. 2б заштрихованными областями.

Дальнейший порядок нахождения параметров γ_{1j} и γ_{2i} следующий.

Определим главные значения γ_{11} и γ_{21} , соответствующие низшей частоте колебаний. Для этого введем коэффициент формы пластины, равный отношению её сторон $k = a_2/a_1$ и запишем второе частотное уравнение (5) в виде:

$$0,5\gamma_{21}a_2 = \operatorname{arctg} \left(-\Theta_{11}^2 \sqrt{1 + (2/v_{11}^2)} \right).$$

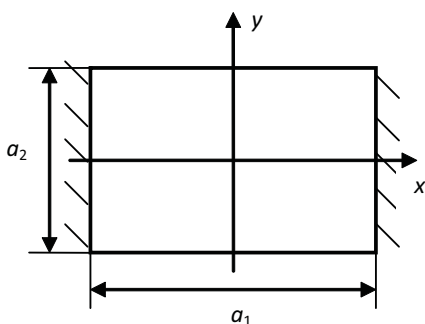


Рис. 1.

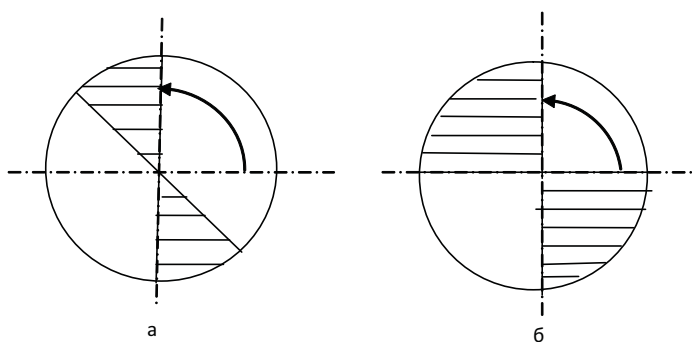


Рис. 2.

Деля все члены этого уравнения на $0,5a_1\gamma_{11}$, и учитывая, что $\gamma_{21} = \gamma_{11} \cdot \nu_{11}$, получим:

$$k = \frac{2 \arctg \left(-\Theta_{11}^2 \sqrt{1 + (2/\nu_{11}^2)} \right)}{\nu_{11} \gamma_{11} a_1} \quad (9)$$

Задаваясь значениями γ_{11} , вычисляя по формуле (6) ν_{11} , можно подобрать значения γ_{11} , ν_{11} , а затем и γ_{21} , удовлетворяющие заданному отношению сторон пластины (9). Необходимо отметить, что при определении арктангенсов углов следует учитывать их наименьшие положительные значения из областей, указанных на рис. 2.

Например, если пластина квадратная и коэффициент Пуассона для её материала равен 0,3, то $k = 1$ и условие (9) выполняется, если

$$\gamma_{11} = \frac{1,280157\pi}{a_1}, \quad \gamma_{21} = \frac{1,695982\pi}{a_1}.$$

Учитывая, что функция $\text{tg}(0,5\gamma_{11}a_1)$ – периодическая с периодом π , для последующих частот можно записать:

$$0,5\gamma_{1j}a_1 = 0,64008\pi + (j-1)\pi \text{ или}$$

$$\gamma_{1j} = \frac{2\pi}{a_1} (j - 0,35992). \quad (10)$$

Аналогично получим:

$$0,5\gamma_{2i}a_1 = 0,84799\pi + (i-1)\pi \text{ или}$$

$$\gamma_{2i} = \frac{2\pi}{a_1} (i - 0,15201). \quad (11)$$

Определив γ_{1j} и γ_{2i} можно по формулам (4) найти значения α_{ij}^2 , собственные частоты колебаний пластины ω_{ij} и коэффициенты показателей степеней α_{1ij} , α_{2ij} . При этом формула для определения собственных частот имеет вид:

$$\omega_{ij} = \frac{4\pi^2}{a_1^2} \left[(j - 0,35992)^2 + (i - 0,15201)^2 \right] \sqrt{\frac{D}{m_0}}, \quad (12)$$

где D – цилиндрическая жесткость пластины.

Из формулы (12) следует, что при достаточно больших значениях i и j , т.е. при высокочастотных колебаниях, можно принять

$$\omega_{ij} = \frac{4\pi^2}{a_1^2} (j^2 + i^2) \sqrt{\frac{D}{m_0}}. \quad (13)$$

В случае, когда количество полувольт вдоль осей x и y одинаково и $i = j$, то с погрешностью, не превышающей 0,3%, собственные частоты могут быть найдены по более простой по сравнению с (12) формуле:

$$\omega_j = \frac{8\pi^2}{a_1^2} \left(j - \frac{1}{4} \right)^2 \sqrt{\frac{D}{m_0}}. \quad (14)$$

Интересно отметить, что в работе [4] для квадратной пластины, защемленной по всем четырём сторонам, при равенстве полувольт вдоль осей x и y получено:

$$\omega_j = \frac{8\pi^2}{a_1^2} \left(j - \frac{1}{3} \right)^2 \sqrt{\frac{D}{m_0}}. \quad (15)$$

Сравнение формул (14) и (15) показывает, что при двух защемленных противоположных сторонах пластины граничные условия на двух других её сторонах не существенно влияют на высшие частоты и формы колебаний, которые как раз и присущи ударным процессам.

При центральном ударе в формуле (1) $x_0 = y_0 = 0$, $W(x_0, y_0) = W_0$, где W_0 – постоянная величина, определяемая в общем случае по формуле: $W_0 = 1 + \exp(-0,5\alpha_{1j}a_1) \cos(0,5\gamma_{1j}a_1) +$

$$\Theta_{ij} \exp(-0,5\alpha_{2ij}a_2) \cos(0,5\gamma_{2i}a_2)$$

Для упрощения дальнейших выкладок введем в формуле (1) следующие обозначения

$$J_{ij} = \int_{-a_1}^{a_1} \int_{-a_1}^{a_1} W_{ij}^2 dx dy, \quad I_{ij} = \int_0^t P(\theta) \sin \omega_{ij}(t - \theta) d\theta$$

и перепишем её в виде:

$$w(x, y, t) = \frac{1}{m_0} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{W_{ij}(x, y) W_0}{J_{ij} \omega_{ij}} I_{ij}. \quad (16)$$

Рассмотрим двойной интеграл J_{ij} , входящий в знаменатель функции (16). По-прежнему будем считать, что пластина квадратная с длиной стороны a_1 . Амплитудная функция (3) состоит из трех слагаемых. Запишем её в виде

$$W_{ij}(x, y) = A + B + C, \quad (17)$$

где

$$A = \cos(\gamma_{1j}x) \cos(\gamma_{2i}y),$$

$$B = \exp[-\alpha_{1ij}(0,5a_1 \pm x)] \cos(0,5\gamma_{1j}a_1) \cos(\gamma_{2i}y),$$

$$C = \Theta_{ij} \exp[-\alpha_{2ij}(0,5a_1 \pm y)] \cos(0,5\gamma_{2i}a_1) \cos(\gamma_{1j}x).$$

Подставляя (17) в подынтегральное выражение функции J_{ij} , получим:

$$\begin{aligned} & \int_{-0,5a_1}^{0,5a_1} \int_{-0,5a_1}^{0,5a_1} W_{ij}^2(x, y) dx dy = \\ & = \int_{-0,5a_1}^{0,5a_1} \int_{-0,5a_1}^{0,5a_1} (A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC) dx dy. \end{aligned}$$

Вычислим отдельно каждый из интегралов подынтегральной суммы:

$$J_{1ij} = \int_{-0,5a_1}^{0,5a_1} \int_{-0,5a_1}^{0,5a_1} A^2 dx dy = \frac{1}{4} \left(a_1 + \frac{1}{\gamma_{1j}} \sin \gamma_{1j} a_1 \right) \left(a_1 + \frac{1}{\gamma_{2i}} \sin \gamma_{2i} a_1 \right),$$

$$J_{2ij} = \int_{-0,5a_1}^{0,5a_1} \int_{-0,5a_1}^{0,5a_1} B^2 dx dy = \frac{C_{1j}^2}{4\alpha_{1ij}} \left(a_1 + \frac{1}{\gamma_{2i}} \sin \gamma_{2i} a_1 \right) [1 - \exp(-\alpha_{1ij} a_1)],$$

$$J_{3ij} = \int_{-0,5a_1}^{0,5a_1} \int_{-0,5a_1}^{0,5a_1} C^2 dx dy = \frac{C_{2ij}^2}{4\alpha_{2ij}} \left(a_1 + \frac{1}{\gamma_{1j}} \sin \gamma_{1j} a_1 \right) [1 - \exp(-\alpha_{2ij} a_1)],$$

$$J_{4ij} = \int_{-0,5a_1}^{0,5a_1} \int_{-0,5a_1}^{0,5a_1} 2AB dx dy = \frac{C_{1j}}{\alpha_{1ij}^2 + \gamma_{1j}^2} \left(a_1 + \frac{1}{\gamma_{2i}} \sin \gamma_{2i} a_1 \right) [-\alpha_{1ij} \exp(-0,5\alpha_{1ij} a_1)],$$

$$J_{5ij} = \int_{-0,5a_1}^{0,5a_1} \int_{-0,5a_1}^{0,5a_1} 2AC dx dy = \frac{C_{2ij}}{\alpha_{2ij}^2 + \gamma_{2i}^2} \left(a_1 + \frac{1}{\gamma_{1j}} \sin \gamma_{1j} a_1 \right) \times [\alpha_{2ij} \cos(0,5\gamma_{2i} a_1) + \gamma_{2i} \sin(0,5\gamma_{2i} a_1) - \alpha_{2ij} \exp(-0,5\alpha_{2ij} a_1)],$$

$$J_{6ij} = \int_{-0,5a_1}^{0,5a_1} \int_{-0,5a_1}^{0,5a_1} 2BC dx dy = \frac{C_{1j} C_{2ij}}{(\alpha_{1ij}^2 + \gamma_{1j}^2)(\alpha_{2ij}^2 + \gamma_{2i}^2)} \times [\alpha_{1ij} \cos(0,5\gamma_{1j} a_1) + \gamma_{1j} \sin(0,5\gamma_{1j} a_1) - \alpha_{1ij} \exp(-0,5\alpha_{1ij} a_1) + [\alpha_{2ij} \cos(0,5\gamma_{2i} a_1) + \gamma_{2i} \sin(0,5\gamma_{2i} a_1) - \alpha_{2ij} \exp(-0,5\alpha_{2ij} a_1)].$$

Здесь в общем случае

$$C_{1ij} = -\cos(0,5\gamma_{1j} a_1), \quad C_{2ij} = \Theta_{ij} \cos(0,5\gamma_{2i} a_2).$$

Общий интеграл определится как

$$J_{ij} = \int_{-0,5a_1}^{0,5a_1} \int_{-0,5a_1}^{0,5a_1} W_{ij}^2 dx dy = J_{1ij} + J_{2ij} + J_{3ij} + J_{4ij} + J_{5ij} + J_{6ij}. \quad (18)$$

Если длительность действия удара на пластину равна τ , то величина I_{ij} определяется по формулам [1]:
во время удара $0 < t < \tau$

$$I_{ij} = \frac{B_0}{a} \left[\exp(-hat) \left(D_{1ij} \sin(\lambda at) + D_{2ij} \cos(\lambda at) + \frac{2\bar{\omega}_{ij}}{s^2 + \bar{\omega}_{ij}^2} \exp(-gat) \right) - \left(D_{3ij} - \frac{2s}{s^2 + \bar{\omega}_{ij}^2} \right) \sin(\omega_{ij} t) - \left(D_{2ij} + \frac{2\bar{\omega}_{ij}}{s^2 + \bar{\omega}_{ij}^2} \right) \cos(\omega_{ij} t) \right], \quad (19)$$

после окончания удара $t > \tau$

$$I_{ij} = \frac{B_0}{a} \left\{ \exp(-hat) \left[\left(D_{1ij} \sin(\lambda at) + D_{2ij} \cos(\lambda at) + \frac{2\bar{\omega}_{ij}}{s^2 + \bar{\omega}_{ij}^2} \exp(-gat) \right) \times \cos[\omega_{ij}(t - \tau)] + \left(D_{2ij} \sin(\lambda at) - D_{1ij} \cos(\lambda at) - \frac{2s}{s^2 + \bar{\omega}_{ij}^2} \exp(-gat) \right) \sin[\omega_{ij}(t - \tau)] \right] - \left(D_{3ij} - \frac{2s}{s^2 + \bar{\omega}_{ij}^2} \right) \sin(\omega_{ij} t) - \left(D_{2ij} + \frac{2\bar{\omega}_{ij}}{s^2 + \bar{\omega}_{ij}^2} \right) \cos(\omega_{ij} t) \right\}, \quad (20)$$

где

$$D_{1ij} = \frac{\lambda h - g(\lambda - \bar{\omega}_{ij})}{2\lambda H_{3ij}} - \frac{h - g(\lambda - \bar{\omega}_{ij})}{2\lambda H_{4ij}},$$

$$D_{2ij} = \frac{gh + \lambda(\lambda - \bar{\omega}_{ij})}{2\lambda H_{3ij}} - \frac{gh + \lambda(\lambda - \bar{\omega}_{ij})}{2\lambda H_{4ij}},$$

$$D_{3ij} = \frac{\lambda h - g(\lambda - \bar{\omega}_{ij})}{2\lambda H_{3ij}} + \frac{h - g(\lambda - \bar{\omega}_{ij})}{2\lambda H_{4ij}},$$

$$\bar{\omega}_{ij} = \omega_{ij} / a, \quad H_{3ij} = h^2 + (\lambda - \bar{\omega}_{ij})^2, \quad H_{4ij} = h^2 + (\lambda + \bar{\omega}_{ij})^2.$$

Определив прогиб пластины (16), можно найти деформации и напряжения на её поверхности в точке с координатами x и y

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} = -\frac{z}{m_0} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial^2 W_{ij}(x, y)}{\partial x^2} \cdot \frac{W_0 I_{ij}}{\omega_{ij} J_{ij}}, \quad (21)$$

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} = -\frac{z}{m_0} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial^2 W_{ij}(x, y)}{\partial y^2} \cdot \frac{W_0 I_{ij}}{\omega_{ij} J_{ij}}, \quad (22)$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y),$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x), \quad (23)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Ez}{1 + \mu} \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y},$$

где E – модуль упругости материала пластины. Для поверхности пластины $z = \pm \delta/2$,

Производные от амплитудной функции (3) имеют вид:

$$\frac{\partial^2 W_{ij}(x, y)}{\partial x^2} = -\gamma_{1j}^2 \cos(\gamma_{1j}x) (\cos(\gamma_{2i}y) - C_{2ij} \exp[-\alpha_{2ij}(0, 5a_2 \mp y)]) + C_{1ij} \alpha_{1ij}^2 \exp[-\alpha_{1ij}(0, 5a_1 \mp x)] \cos(\gamma_{2i}y),$$

$$\frac{\partial^2 W_{ij}(x, y)}{\partial y^2} = -\gamma_{2i}^2 \cos(\gamma_{2i}y) (\cos(\gamma_{1j}x) - C_{1j} \exp[-\alpha_{1ij}(0, 5a_1 \mp x)]) + C_{2ij} \alpha_{2ij}^2 \exp[-\alpha_{2ij}(0, 5a_2 \mp y)] \cos(\gamma_{1j}x),$$

$$\frac{\partial^2 W_{ij}(x, y)}{\partial y \partial x} = -\gamma_{1j} \gamma_{2i} \sin(\gamma_{2i}y) (\sin(\gamma_{1j}x) \mp C_{1j} \alpha_{1ij} \gamma_{2i} \exp[-\alpha_{1ij}(0, 5a_1 \mp x)]) \mp \pm C_{2ij} \alpha_{2ij} \gamma_{1j} \exp[-\alpha_{2ij}(0, 5a_2 \mp y)] \sin(\gamma_{1j}x).$$

С учетом этого деформации вдоль положительных осей x и y определяются по формулам:

$$\varepsilon_x = -\frac{z}{m_0} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left(-\gamma_{1j}^2 \cos(\gamma_{1j}x) (1 - C_{2ij} \exp[-0, 5\alpha_{2ij}a_2]) + C_{1j} \alpha_{1ij}^2 \exp[-\alpha_{1ij}(0, 5a_1 - x)] \cdot \frac{I_{ij}}{\omega_{ij} J_{ij}} \right).$$

$$\varepsilon_y =$$

$$-\frac{z}{m_0} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left(-\gamma_{2i}^2 \cos(\gamma_{2i}y) (1 - C_{1j} \exp[-0, 5\alpha_{1ij}a_1]) + C_{2ij} \alpha_{2ij}^2 \exp[-\alpha_{2ij}(0, 5a_2 - y)] \cdot \frac{I_{ij}}{\omega_{ij} J_{ij}} \right).$$

Далее по формулам (23) можно найти напряжения на поверхности пластины. Анализ полученных зависимостей позволит установить взаимосвязи деформаций и напряжений на поверхности пластины с условиями её ударного нагружения или, иными словами, с параметрами ударного импульса $P(\theta)$, действующего со стороны рабочего инструмента на пластину.

Литература

1. Еремыянец В.Э. Расчёт ударных процессов в машине. Ч.8. Модели поперечного удара по пластине: Учебно-методическое пособие. Бишкек: Изд-во КРСУ, 2007. 65 с.
2. Еремыянец В.Э., Панова Л.Т., Слепнёв А.А. К задаче о продольном ударе по стержню, опирающемуся на пластину // Проблемы машиностроения и надёжности машин. 2007. №4. РАН. С. 58–63.
3. Еремыянец В.Э., Панова Л.Т., Асанова А.А. Анализ собственных частот и форм колебаний прямоугольной пластины, заземленной по двум противоположным краям // Вестник Кыргызско-Российского Славянского ун-та. 2009. Т. 9. № 1. С. 64–70.
4. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 480 с.