УДК 624.012

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗГИБНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ТРЕЩИНАМИ

Т.Б. Дуйшеналиев, Б.С. Ордобаев

Предложена математическая модель деформирования предварительно-напряженных железобетонных балок с трещинами. Эксперименты показали, что модель хорошо описывает напряженно-деформированное состояние железобетона с различными видами армирования и все стадии нагружения.

Ключевые слова: математическая модель; изгиб; предварительно-напряженный железобетон; проволочная арматура; деформации; напряжения; нормы проектирования; эксперименты.

ЖАРАКАСЫ БАР ИЙИЛИП МАЙЫШКАН ТЕМИР БЕТОНДУУ КОНСТРУКЦИЯЛАРДЫ МОДЕЛДӨӨ

Т.Б. Дуйшеналиев, Б.С. Ордобаев

Жаракасы бар алдын ала чыңалган темир бетондордун майышуусунун математикалык модели сунушталды. Тажрыйбалар көрсөткөндөй, бул модель ар кандай түрдөгү бекемдөөдө жана жүк жүктөөнүн бардык стадияларында темир бетондун чыңалып-майышкан абалын жакшы сыпаттайт.

Түйүндүү сөздөр: математикалык модель; ийилүү; алдын ала чыңалган темир бетон; зым арматурасы; майышкан; чыналуу; долборлоо ченемдери; тажрыйба.

MODELING BENDING DEFORMATIONS OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES WITH CRACKS

T.B. Duishenaliev, B.S. Ordobaev

The article proposes a mathematical model of the deformation of prestressed reinforced concrete beams with cracks. The experiments showed that the model describes well the stress-strain state of reinforced concrete with various types of reinforcement and all stages of loading.

Keywords: mathematical model; bending; prestressed reinforced concrete; wire reinforcement; deformation; stress; design standards; experiments.

Введение. Теория деформирования железобетона [1, 2] полагает, что изгибаемые элементы при эксплуатационных нагрузках имеют трещины в растянутой зоне, учитывается работа бетона между трещинами, используется гипотеза плоских сечений, напряжения в сжатой зоне бетона принимаются постоянными. Применение гипотезы плоских сечений для расчета предварительно напряженных элементов приводит, как известно, к необходимости определения высоты сжатой зоны бетона с помощью решения кубического уравнения.

Однако для сечений с трещиной гипотеза плоских сечений малоприменима, поэтому были разработаны эмпирические формулы [1] для определения высоты сжатой зоны сечения с трещиной. Это позволило создать инженерный метод расчета обычных и предварительно напряженных изгибаемых, а также внецентренно-сжатых элементов при кратковременном и длительном воздействии нагрузки (СНиП 2.03.01–84*) [3].

Недостатки нормативного метода расчета деформаций. Известно, что применимость нормативного метода расчета ограничена эксплуатационными нагрузками. Отказ от гипотезы плоских сечений для средних деформаций привел к заметному искажению действительной картины распределения усилий в арматуре: они одинаковы для стержней, расположенных вблизи нейтральной линии и вблизи растянутой (сжатой) грани элемента [3, 4, 5]. Напряжение в сжатой арматуре, даже при однорядном расположении, как оказалось, не зависит от ее положения относительно нейтральной оси. Если эта арматура расположена в пределах условной (прямоугольной, укороченной) высоты сжатой зоны бетона, то в ней принято максимальное напряжение $\sigma_S^{'} = \varepsilon_S \cdot E_S$. Однако если же сжатая арматура не попала в эту условную зону, то она совсем не учитывается в расчете [3, 5].

Известно, что растянутый бетон над трещиной может воспринимать значительную часть растягивающего усилия. Неучет сопротивления растянутого бетона в сечении с трещиной приводит к погрешностям при определении напряжений в арматуре σ_S, в особенности, для слабоармированных элементов, что сказывается на точности расчета ширины раскрытия трещин [6].

Принятие условной прямоугольной эпюры напряжений в сжатой зоне бетона несколько упрощает расчет, однако при этом действительное положение нейтральной оси остается неизвестным. Это затрудняет учет работы арматуры, а также определение жесткости на рассматриваемом участке элемента.

Принятие постоянного значения v, равного произведению коэффициента полноты эпюры сжатой зоны бетона ω на коэффициент упругости $v_в$ и входящего непосредственно в расчет кривизны, для эксплуатационной стадии вполне оправдано. Вместе с тем для стадий, близких к разрушению, такой подход является неприемлемым.

Эти, а также другие недостатки нормативного метода расчета деформаций железобетонных конструкций, указывают на необходимость построения общих методов расчета, охватывающих все стадии нагружения и учитывающих характер внешнего воздействия и различные виды армирования.

Математическая модель. Задаемся законом изменения деформаций по высоте сечения, так как без него невозможно отразить работу многорядной и особенно сжатой арматуры. Необходимо, по-возможности, свести к минимуму использование эмпирических формул. Учтем влияние предварительного напряжения арматуры растянутой зоны. При одинаковом уровне нагружения высота сжатой зоны бетона и напряжения в арматуре всегда больше в балках с большим уровнем преднапряжения арматуры. В балках с одинаковыми коэффициентами армирования, но с большим уровнем преднапряжения арматуры одной и той же высоте сжатия зоны бетона соответствуют большие напряжения в арматуре [2, 7, 8]. В таких балках с относительно низким коэффициентом армирования, величины напряжений, соответствующих одинаковой высоте сжатой зоны бетона, выравниваются только в стадии, близкой к разрушению. Зависимость между деформациями и напряжениями в растянутой арматуре на всех стадиях ее работы можно описать кубической сплайн-функцией [7].

Определение деформированного и напряженного состояний нормальных сечений базируется на уравнениях равновесия внешних и внутренних усилий с учетом выбранной расчетной схемы распределения последних по сечению элемента. Работа многорядной и, особенно, сжатой арматуры зависит от изменения деформаций по высоте сечения.

Эпюра напряжений в сжатой зоне бетона принимается переменной формы и зависит от уровня сжимающих напряжений, а также прочностных и деформационных свойств бетона. Неупругие деформации бетона сжатой зоны учитываются коэффициентом n, определяемого в зависимости от свойств бетона и уровня действующих в нем напряжений [7, 8].

Таким образом, математическая модель для описания деформирования железобетонных предварительно-напряженных балок основана на следующих положениях:

1. Эпюра напряжений в сжатой зоне бетона принимается переменной формы и характеризуется высотой x, полнотой w и максимальным напряжением $\sigma_к$.

2. Эпюра напряжений в растянутой зоне бетона характеризуется высотой x_t, полнотой w_t и максимальным напряжением R_{tn}. Предельная растяжимость бетона равна:

$$\varepsilon_{‰t} = \frac{2 \cdot R_{tn}}{E_{‰}} . \tag{1}$$

3. Используется фактическая зависимость между напряжениями и деформациями растянутой арматуры на всех стадиях ее работы.

4. Используется гипотеза о пропорциональности средних деформаций бетона и арматуры расстоянием до нейтральной оси.

5. Коэффициент полноты эпюры напряжений в сжатой зоне w и коэффициент упругости n зависят от величины максимальных напряжений $O_в$, а также от прочностных и упругопластических свойств бетона.

С учетом принятых исходных предпосылок, уравнения равновесия внешних и внутренних усилий для железобетонных изгибаемых элементов прямоугольного сечения с многорядным расположением арматуры имеет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_{si} \cdot A_{si} + b \cdot \omega_t \cdot R_{tn} \cdot X_t - b \cdot \omega \cdot \sigma_b \cdot x = 0 ; \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_{si} \cdot A_{si}(Z_{bc} - a_i) + b \cdot \omega_t \cdot R_{tn} \cdot X_t \cdot Z_{bt} - M = 0 . \tag{3}$$

Используя гипотезу плоского поворота, получим:

$$\overline{\varepsilon}_{si} - \varepsilon_{spi} = \overline{\varepsilon}_b \cdot \frac{h - a_i - \overline{x}}{\overline{x}} , \tag{4}$$

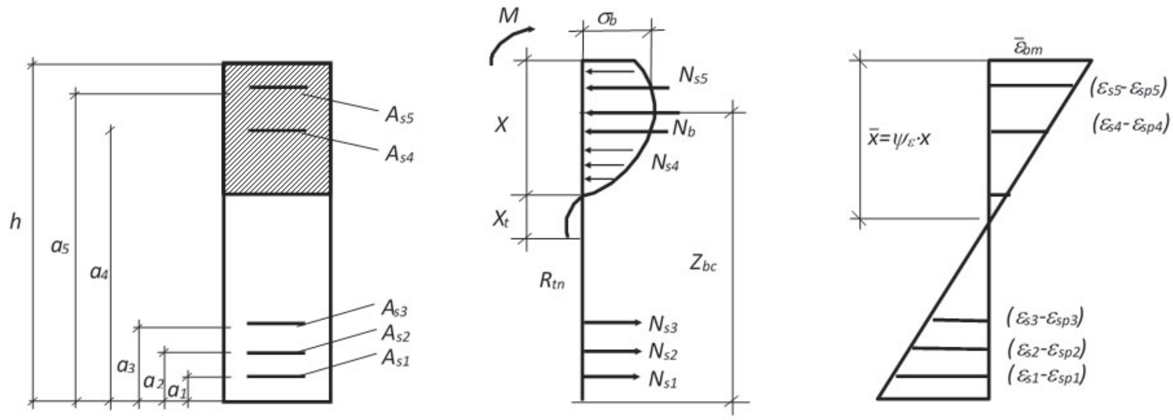
где $\overline{\varepsilon}_b$ и ε_{si} – средние относительные деформации крайнего волокна сжатой зоны бетона и i-го ряда арматуры соответственно; ε_{spi} – относительная деформация i-го ряда арматуры от предварительного напряжения с учетом всех потерь (рисунок 1).

Средние деформации и высота сжатой зоны выражаются через деформации и высоту сжатой зоны в сечении с трещиной при помощи коэффициентов $y_в$, y_s, и y_e, [7]. Переходя к напряжениям, получим:

$$\sigma_{si} = \nu_{si} \frac{\psi_{‰}}{\psi_s} \cdot \alpha \cdot \frac{\sigma_{‰}}{\nu} \cdot \frac{h - a_i - \psi_\varepsilon \cdot x}{\psi_\varepsilon \cdot x} + \sigma_{spi} , \tag{5}$$

где $\alpha = \frac{E_s}{E_{‰}}$; ν и ν_{si} – коэффициенты упругости крайнего волокна сжатой зоны бетона и растянутой арматуры соответственно.

Коэффициент y_s определяется по формуле (167) СНиП 2.03.01–84 [5]. При этом в соответствии с экспериментальными данными [7, 9] для арматурной проволоки класса Вр-П первое слагаемое формулы (167) принимаем равным 1,4. Для гладкой арматурной проволоки класса В-П принимаем y_s = 1. Величины коэффициентов $y_в$ = 0,9 и y_e = 1,2 принимаем для бетона средней прочности по результатам исследований [4, 7], данным [8] и рекомендациям ФИП-ЕКБ.



сечение с трещиной — усилия в сечении с трещиной — деформации в среднем сечении

Рис. 1. Расчетная схема деформаций и напряжений
в нормальных сечениях железобетонной балки с трещинами в растянутой зоне

Расстояние от центра тяжести напряженной в сжатой зоне бетона до нижней грани элемента вычисляется по формуле:

$$Z_{bl} = \frac{6h-(2\cdot\omega+1)\cdot x}{6}. \tag{6}$$

Расстояние от центра тяжести эпюры напряжений в растянутой зоне от центра тяжести эпюры напряжений в сжатой зоне:

$$Z_{bt} = \frac{(5-2\cdot\omega)\cdot x+(5-2\cdot\omega_t)\cdot x_t}{6}. \tag{7}$$

Для определения коэффициентов w и n используем основанные на экспериментальных данных [7] зависимости:

$$\omega = \frac{a+b\cdot\sigma_b^k}{c}, \tag{8}$$

$$\nu = \frac{d-l\cdot\sigma_b^k}{c}, \tag{9}$$

где *a, b, c, d*, *l* – коэффициенты, зависящие от прочностных и деформативных свойств бетона.

Значения коэффициентов, входящих в формулы (8) и (9), можно определить, задавшись граничными значениями функций $w = f(s^k_b)$ и $n = (s^k_b)$. При напряжении в бетоне, соответствующем нижней границе зоны микротрещинообразования $s_b=R^0_{crc}$, принимаем $w = 0{,}5$ и $n = 1$.

Величину R^0_{crc} рекомендуется вычислять по формуле, предложенной в работе [7], в зависимости от кубиковой и призменной прочности бетона:

$$R^0_{crc}=(0{,}2+0{,}0022*R)*R_b. \tag{10}$$

Другие граничные значения функций (8) определяются при напряжении в бетоне, соответствующем призменной прочности.

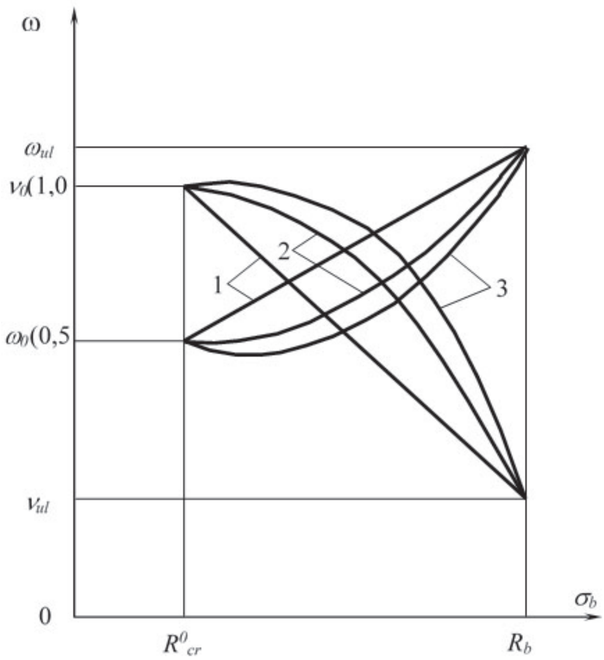


Рисунок 2 – Зависимость коэффициентов *w* и *n* от максимального напряжения сжатой зоны s_b:
K = 1 (линия 1); K = 2 (кривая 2); K = 3 (кривая 3).

Для определения w_u используется зависимость из работы [7], скорректированная в результате анализа и обработки дополнительных экспериментальных данных [7, 8]:

$$w_u=0,985-0,0038*R_b\ . \tag{11}$$

Граничное значение коэффициента *n* вычисляется по формуле:

$$\nu_u = \frac{R_b}{(4,16-0,002\cdot R_b)\cdot 10^{-3}}\ . \tag{12}$$

После определения коэффициентов зависимости (8) и (9) приобретают следующий вид:

$$\omega = \frac{0,5\cdot R_b^k - \omega_u (R_{crc}^0)^k + (\omega_u - 0,5)\sigma_b^k}{R_b^k - (R_{crc}^0)^k}\ , \tag{13}$$

$$\nu = \frac{R_b - \nu_u (R_{crc}^0)^k - (1-\nu_u)\sigma_b^k}{R_b^k - (R_{crc}^0)^k}\ . \tag{14}$$

Показатель степени в формулах (8) и (9) может быть принят равным K = 1...3. Как показал сравнительный анализ результатов расчета и их сопоставление с экспериментальными данными, наилучшая сходимость достигается при линейной зависимости *w* и *n* от s_b (рисунок 2).

В соответствии с результатами эксперимента и данными работы [7], полнота эпюры напряжений в растянутой зоне для бетона средней прочности может быть принята равной w_t = 0,75.

Из совместного решения (2), (3) и (4) получаем уравнение третьей степени для определения высоты сжатой зоны бетона в сечении с трещиной:

$$A \times x^3 + Bx^2 + C \times x - Д = 0\,, \tag{17}$$

где

$$A = y_e \times b \times K_1 \times w \times (2w+1); \tag{18}$$

$$B = 6 \times y_e \times b \times w \times (M + K_2 - M_t - K_1 \times h) - \frac{\nu_s \cdot \psi_b \cdot \psi_\varepsilon \cdot \alpha \cdot n_1 \cdot N_t \cdot (2\cdot\omega+1)}{\nu \cdot \psi_s}; \tag{19}$$

$$\begin{aligned} C = {} & \frac{6\cdot\nu_s\cdot\psi_b\cdot\psi_\varepsilon\cdot\alpha}{\nu\cdot\psi_s}(M + K_2 - M_t)n_1 - (N_t + K_1)\cdot n_3 + \\ & + \frac{\nu_s\cdot\psi_b\cdot\alpha\cdot N_t}{\nu\cdot\psi_s}[(2\cdot\omega+1)\cdot n_2 + 6\cdot h\cdot n_1\cdot\psi_\varepsilon]; \end{aligned} \tag{20}$$

$$D = \frac{6\cdot\nu_s\cdot\psi_b\cdot\alpha}{\nu\cdot\psi_s}[(M + K_2 - M_t)\cdot n_2 + h\cdot n_2\cdot N_t - (K_1 + N_t)\cdot n_4]; \tag{21}$$

$$\left.\begin{aligned} &\alpha = \frac{E_s}{E_b};\ n_1 = \sum_{i=1}^{n} A_{si};\ n_2 = \sum_{i=1}^{n} A_{si}\cdot(h - a_i); \\ &n_3 = \sum_{i=1}^{n} A_{si}\cdot a_i;\ n_4 = \sum_{i=1}^{n} A_{si}\cdot a_i(h - a_i); \\ &k_1 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{spi}\cdot A_{si};\ k_2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{spi}\cdot A_{si}\cdot a_i; \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

$$N_t = b \times w_t \times R_{tn} \times x_{t;} \tag{23}$$

$$M_t = b \times w_t \times R_{tn} \times x_t \cdot \left[\frac{(5 - 2\cdot\omega)\cdot x + (5 - 2\cdot\omega_t)\cdot x_t}{6}\right]. \tag{24}$$

Отметим, что для изгибаемых элементов без предварительного напряжения, уравнение (17) преобразуется в квадратное.

Напряжение в бетоне определяется по формуле [7]:

$$\sigma_b = \frac{6\cdot\psi_\varepsilon\cdot(M + K_2 - M_t)\cdot x + \psi_\varepsilon\cdot N_t\cdot[6\cdot h - (2\cdot\omega+1)]\cdot x}{\psi_\varepsilon\cdot b\cdot\omega\cdot[6\cdot h - (2\cdot\omega+1)\cdot x]\cdot x^2 - \dfrac{6\cdot\nu_s\cdot\psi_b\cdot\alpha}{\nu\cdot\psi_s}\cdot(n_4 - \psi_\varepsilon\cdot n_3\cdot x)}. \tag{25}$$

Алгоритм расчета. Уравнения (17) и (25) решаются совместно с уравнениями (15), (16) итерационным методом. При этом используется описываемая кубическим сплайном зависимость *«s_s -e_s»*. Вначале задаются определенные значения $n = 0{,}6$; $n_s = 1$; $N_t = M_t = 0$. Затем вычисляется соответствующее значение w по формуле:

$$\omega = \frac{\omega_u - 0{,}5\cdot\nu_u - (\omega_u - 0{,}5)\cdot\nu}{1 - \nu_u}. \tag{26}$$

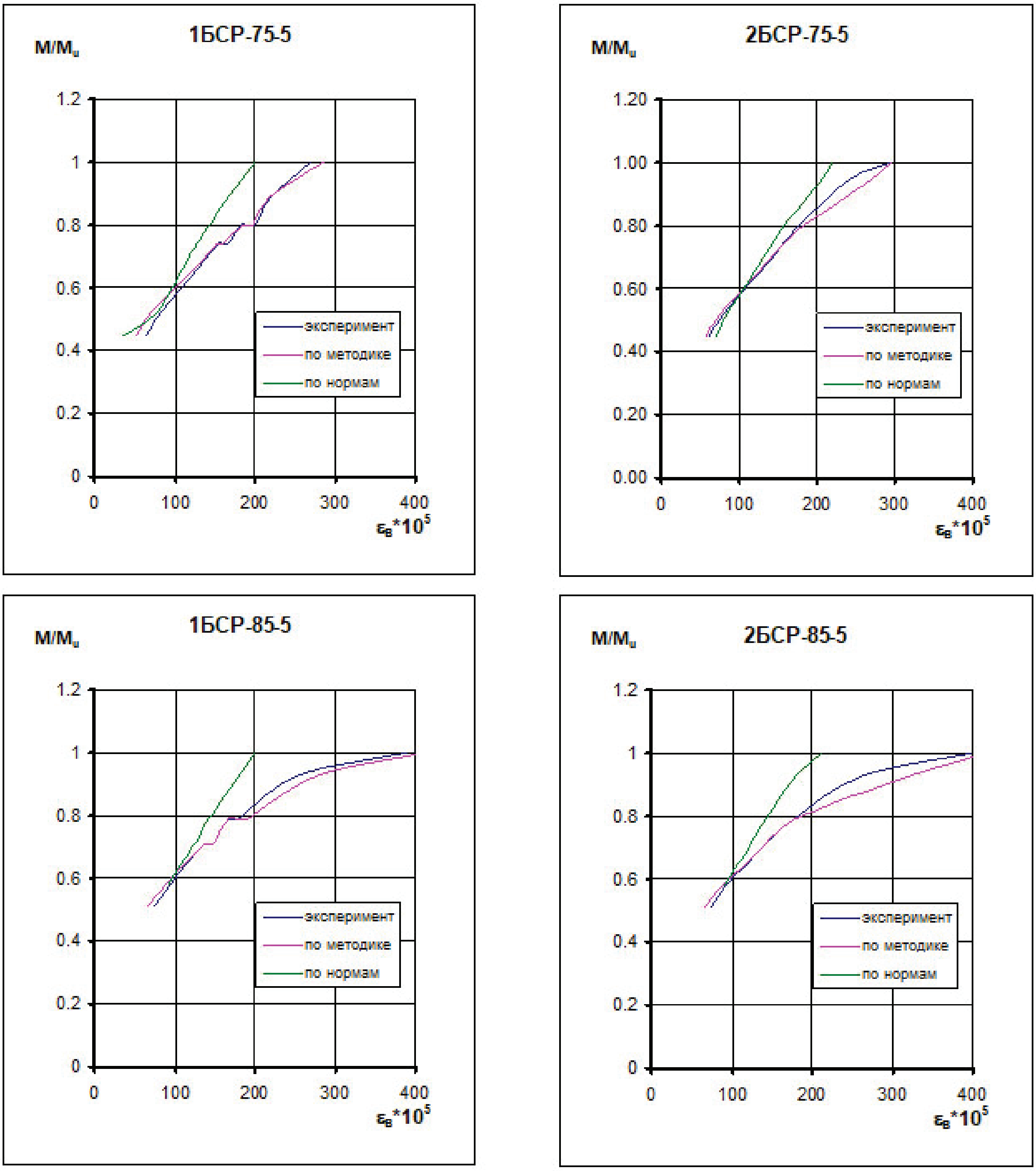
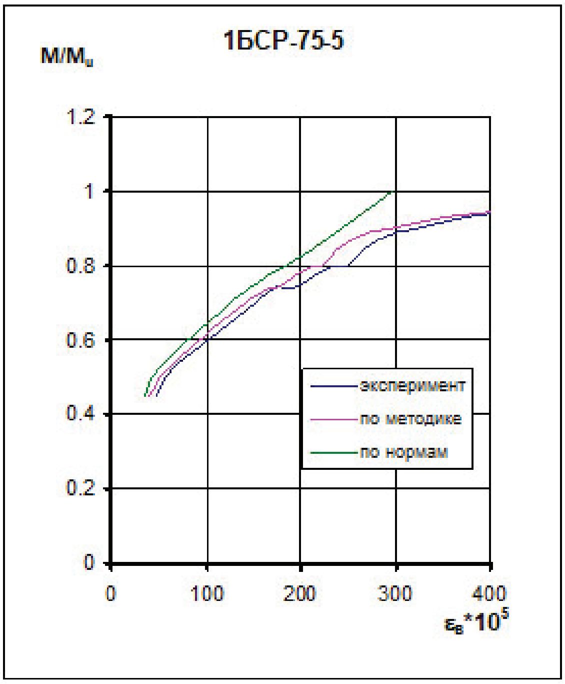
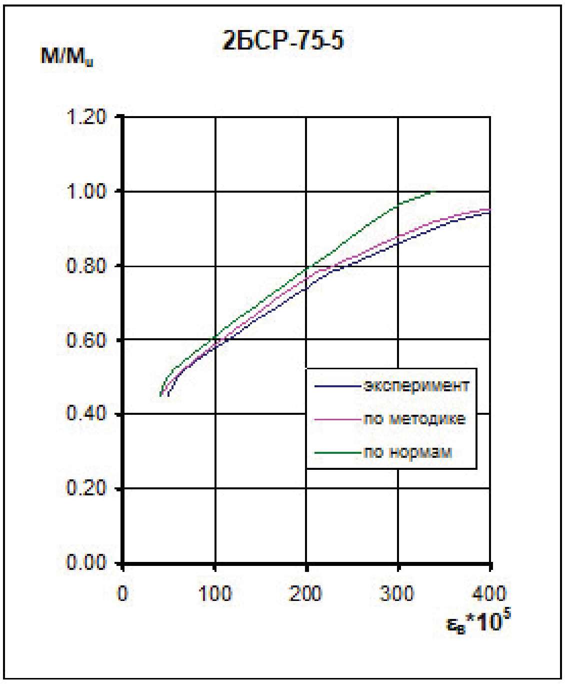
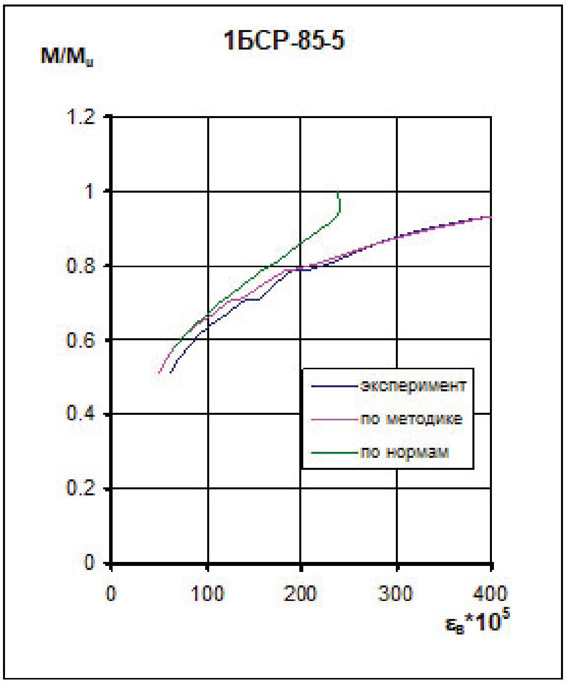


Рисунок 3 – Зависимость средних деформаций бетона сжатой грани железобетонных балок от уровня нагружения. M/M_u – изгибающий момент, отнесенный к разрушающему моменту







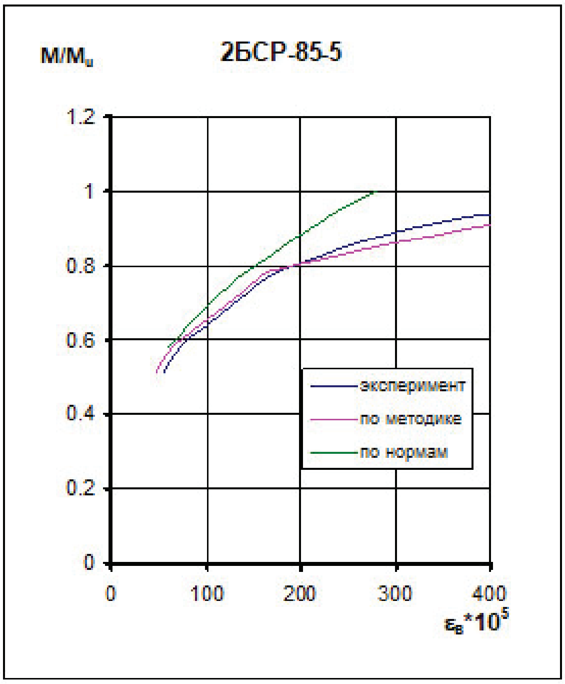


Рисунок 4 – Зависимость средних деформаций арматуры растянутой зоны балок от уровня нагружения. M/M_u – изгибающий момент, отнесенный к разрушающему моменту

После этого из уравнения (17) определяется высота сжатой зоны, а по формуле (25) вычисляется напряжение в бетоне s_b. Затем уточняются величины w и n по формулам (15) и (16), после чего первый цикл повторяется до тех пор, пока не будет обеспечена сходимость по $n(|n_n–n_{n-1}|<0,01$, где n – число итераций первого цикла). Далее определяется высота растянутой зоны бетона над трещиной по формуле:

$$x_t = \frac{2 \cdot R_{tn} \cdot \nu}{\sigma_b} \cdot x\ . \tag{27}$$

Вычисляется равнодействующая усилий в растянутой зоне бетона N_t и ее момент относительно центра тяжести эпюры напряжений в сжатой зоне бетона M_t. С учетом N_t и M_t расчет повторяется до тех пор, пока не будет обеспечена сходимость по M_t ($|M_{t(m)}$-$M_{t(m-1)}|<1$ Н×м, где m – число итераций второго цикла).

После вычисления деформаций в арматуре с помощью подпрограмм [7] определяются напряжения в арматуре и вычисляется коэффициент упругости арматуры:

$$\nu_s = \frac{\sigma_{si} - \sigma_{spi}}{\varepsilon_{si} \cdot E_{si} - \sigma_{spi}}\ . \tag{28}$$

Расчет повторяется до тех пор, пока не будет обеспечена сходимость по n_{si} ($|n_{si(j)}–n_{si(j-1)}|<0,01$, где j – число итераций третьего цикла).

В результате определяется высота сжатой и растянутой зон бетона, напряжения в бетоне и арматуре.

Деформации крайнего волокна сжатой зоны бетона и растянутой арматуры могут быть определены по формулам:

$$\begin{gathered} \varepsilon_{b,av} = \frac{\sigma_b \cdot \psi_b}{E_b \cdot \nu}, \\ \varepsilon_{b,av} = \frac{\varepsilon_{b,av} \cdot (h - a_i - x \cdot \psi_\varepsilon)}{x \cdot \psi_\varepsilon}. \end{gathered} \tag{29}$$

Экспериментальная состоятельность математической модели. Для реализации предлагаемой математической модели разработана компьютерная программа по расчету параметров напряженно-деформированного состояния железобетонных балок. Состоятельность модели определялось по результатам испытаний 32 железобетонных балок прямоугольного сечения размером 10×20×300 см, изготовленных из тяжелого бетона прочностью 42,7...48,6 МПа). Балки армировались стабилизированной и отпущенной (по ГОСТ 7348–81) проволокой классов Вр-П и В-П диаметром 5 мм [7]. Варьировался коэффициент армирования сечения: μ = 0,43...0,85 % и контролируемое предварительное напряжение арматуры – 0,75 и 0,85 σ_u. Верхняя зона балок армировалась двумя проволоками соответствующего класса диаметром 5 мм. Уровень предварительного напряжения этой арматуры задавали с таким расчетом, чтобы не допустить образования трещин в верхней зоне образцов от усилия предварительного обжатия [7].

Разработанная математическая модель хорошо описывает процесс деформирования железобетонных конструкций с трещинами (рисунки 3 и 4). Нормы (СНиП 2.03.01–84*) дают удовлетворительные результаты на эксплуатационных стадиях нагружения. На стадиях, близких к разрушению, отклонения от опытных величин деформаций значительно возрастают [10, 11].

Литература

1. *Гвоздев А.А.* Некоторые вопросы расчета прочности и деформаций железобетонных элементов при работе арматуры в пластической стадии / А.А. Гвоздев, Н.М. Мулин, Ю.П. Гуща // Изв. вузов. 1968. № 6.
2. *Мурашев В.И.* Теория появления и раскрытия трещин, расчет жесткости железобетонных элементов / В.И. Мурашев // Строительная промышленность. 1940. № 11.
3. СНиП 2.03.01–84*. Бетонные и железобетонные конструкции. М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1989. 80 с.
4. *Гуща Ю.П.* Статическая прочность железобетонных конструкций и их деформации в стадии, близкой к разрушению: дис. ...д-ра техн. наук / Ю.П. Гуща. М., 1981.
5. СНиП 2.03.01–84. Бетонные и железобетонные конструкции / Госстрой СССР. М., 1985.
6. НИИЖБ. Научно-технический отчет по теме «Разработать предложения по внесению дополнений в СНиП П-21–75 и развивающие его руководства по уточнению работы растянутого бетона над трещинами и сжатой арматуры при расчете железобетонных конструкций по деформациям и трещиностойкости» / Ю.П. Гуща, Л.Л. Лемыш и др. М., 1985.
7. *Дуйшеналиев Т.Б.* Прочность, трещиностойкость и деформативность железобетонных изгибаемых элементов, армированных высокопрочной стабилизированной проволокой, при статическом и немногократно повторном нагружении: дис. ...канд. техн. наук / Т.Б. Дуйшеналиев. Ростов н/Д, 1988.
8. *Пиневич С.С.* Исследование выносливости стабилизированных и отпущенных семипроволочных канатов и работы армированных ими железобетонных преднапряженных изгибаемых элементов при многократно повторном нагружении: дис. ...канд. техн. наук / С.С. Пиневич. Ростов н/Д, 1981.
9. *Семенов А.И.* Предварительно напряженный железобетон с витой проволочной арматурой / А.И. Семенов. М.: Стройиздат, 1976.
10. *Дуйшеналиев Т.Б.* Неклассические решения механики деформируемого тела / Т.Б. Дуйшеналиев. М.: Изд-во МЭИ, 2017. С. 400.
11. *Ордобаев Б.С.* Модель преобразования упругих тел на основе пространственного градиента перемещения / Б.С. Ордобаев, Ч.Т. Дуйшеналиев, А.С. Дуйшембиев // Вестник КРСУ. 2018. Т. 18. № 4. С. 123–125.