

УДК 539.3

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНСТРУКЦИОННОЙ ПОДАТЛИВОСТИ ПЛАСТИНЫ,
ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПО ДВУМ ПРОТИВОПОЛОЖНЫМ СТОРОНАМ**

В.Э. Еремянц, Р.Е. Васильков

Обосновывается необходимость установления влияния конструкционной податливости обрабатываемого объекта на коэффициент восстановления скорости бойка ударной машины для очистки поверхностей. От этого параметра зависит режим работы виброударной машины, её производительность и энергоёмкость. Приводятся результаты предшествующих и новых экспериментальных исследований соударения шара с пластиной, защемленной по двум противоположным сторонам. Представлены экспериментальные зависимости коэффициента восстановления скорости шара при ударе по пластинам различного размера от координаты точки удара на их поверхности. Предложен алгоритм определения коэффициентов конструкционной податливости и жесткости пластины, основанный на классических представлениях теории колебаний пластин. Показано, что расчетные зависимости, полученные по этому алгоритму, качественно совпадают с результатами экспериментов. Отмечена необходимость дальнейшего уточнения этого алгоритма путем учета в математической модели упругопластических контактных деформаций.

Ключевые слова: ударная машина; боек; пластина; удар; коэффициент восстановления; конструкционная податливость; конструкционная жесткость.

**ЭКИ КАРАМА-КАРШЫ ТАРАПТАРДАН КЫСЫП ТУРГАН
ПЛАСТИНАНЫН КОНСТРУКЦИЯЛЫК ИЙКЕМДҮҮЛҮГҮН АНЫКТОО**

В.Э. Еремянц, Р.Е. Васильков

Бул макалада иштетилүүчү объектинин конструкциялык ийкемдүүлүгүнүн тазалоочу какма машинанын таягынын ылдамдыгын калыбына келтирүү коэффициенти тийгизген таасирин белгилөөнүн зарылдыгы негизделет. Ушул параметрден дирилдөөчү сокмо машинанын иштөө режими, анын өндүрүмдүүлүгү жана энергия сыйымдуулугу көз каранды. Карама-каршы тарабы кысылып турган пластина менен шардын кагылуусун ага чейинки жана жаңы эксперименталдык изилдөөлөрдүн жыйынтыгы келтирилди. Ар түрдүү өлчөмдөгү пластиналар боюнча шарды урууда шардын ылдамдыгынын калыбына келүү коэффициенти кагылуу чекитинин координатынан көз карандылыгынын эксперименталдык жыйынтыктары берилди. Пластинанын классикалык серпилүү теориясына негизделген пластинанын конструкциялык ийкемдүүлүк жана катуулук коэффициенти аныктоо алгоритми сунушталды. Ушул алгоритм боюнча алынган эсептик көз карандылыктар эксперименттин жыйынтыктары менен сапаттык дал келе тургандыгы көрсөтүлдү. Математикалык моделде серпилгич пластикалык байланыш майышууларды эске алуу аркылуу ушул алгоритмди андан ары тактоонун зарылдыгы келип чыкты.

Түйүндүү сөздөр: какма машина; балканын мизи; пластина; сокку; калыбына келтирүү коэффициенти; конструкциялык ийкемдүүлүк; конструкциялык катуулук.

**DETERMINATION OF THE CONSTRUCTION SENSITIVITY
OF A PLATE JAMMED IN TWO OPPOSITE PARTIES**

V.E. Eremyants, R.E. Vasilkov

The article substantiates the need to establish the influence of the structural compliance of the processed object on the coefficient of recovery of the speed of the striker of an impact machine for cleaning surfaces. The operating mode of the vibro-impact machine, its performance and energy consumption depend on this parameter. The results of previous and new experimental studies of the collision of a ball with a plate clamped on two opposite sides are presented. Experimental dependences of the coefficient of recovery of the velocity of a ball upon impact on plates of various sizes on the coordinate of the point of impact on their surface are presented. An algorithm for determining the coefficients

of structural compliance and stiffness of the plate is proposed, based on the classical concepts of the theory of plate vibrations. It is shown that the calculated dependences obtained by this algorithm are in qualitative agreement with the experimental results. The need for further refinement of this algorithm is noted by taking into account elastoplastic contact deformations in the mathematical model.

Keywords: impact machine; striker; plate; impact; coefficient of recovery; structural compliance; structural rigidity.

Практика создания и эксплуатации виброударных машин для очистки внутренних поверхностей золошлакопроводов, угольных бункеров и различных емкостей показывает, что режим работы этих машин существенно зависит от конструкционной податливости обрабатываемой поверхности. Под конструкционной податливостью поверхности e понимается её прогиб w в точке приложения единичной силы P . Величина обратная конструкционной податливости называется конструкционной жесткостью c :

$$e = \frac{w}{P}; \quad c = \frac{1}{e}. \quad (1)$$

Влияние конструкционной податливости обрабатываемого объекта на режим работы машины связан с изменением коэффициента восстановления скорости бойка ударной машины при ударе по инструменту [1]. При изменении коэффициента восстановления меняются начальные условия в цикле работы ударной машины и, как следствие этого, меняется режим её работы, а следовательно, ее производительность и энергоёмкость.

Это определило необходимость установления влияния конструкционной податливости объекта на коэффициент восстановления скорости тел при ударе. С этой целью в работе [2] были проведены экспериментальные исследования коэффициента восстановления скорости стального шара диаметром 27,1 мм при ударе по поверхности стального короба, размеры и расчетная схема которого показаны на рисунке 1, а, б.

В результате экспериментов получено, что коэффициент восстановления зависит от скорости удара и координаты точки соударения. Например, при ударе по центру короба коэффициент восстановления скорости шара больше, чем при ударе по его краю (рисунок 1, в, кривая 2). Снижение коэффициента восстановления с увеличением скорости удара объясняется возрастанием энергии, затрачиваемой на пластические деформации в контакте тел.

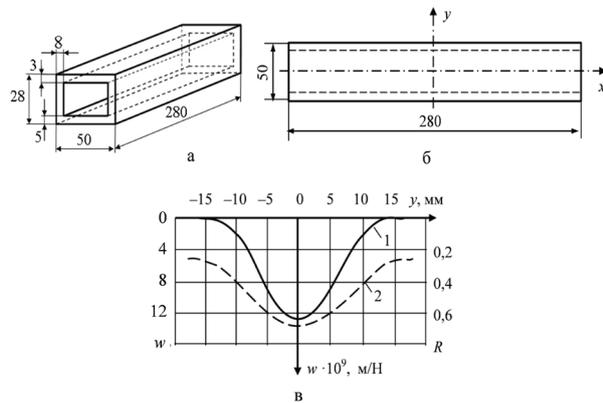


Рисунок 1 – Конструкция короба (а), расчетная схема его поверхности (б) и зависимости конструкционной податливости пластины (кривая 1) и коэффициента восстановления скорости шара после удара (кривая 2) от координаты точки удара (в) [3].
Скорость соударения 3,1 м/с

Теоретический расчет податливости поверхности короба в его различных точках, проведенный в работе [3], показал, что зависимость податливости поверхности короба от координаты точки приложения ударной нагрузки (рисунок 1, в, кривая 1) хорошо согласуется с зависимостью коэффициента восстановления скорости шара после удара (кривая 2). Расхождение наблюдается только на зажатых краях пластины, где коэффициент восстановления определяется пластическими контактными деформациями, которые в расчете не учитывались.

Следует отметить, что в предшествующей работе [3] в значениях прогибов по оси w на этом рисунке была допущена опечатка, они оказались вдвое меньше действительных. Поэтому в рисунок 1, в внесены соответствующие исправления.

В последующие годы были расширены экспериментальные исследования влияния конструкционной податливости объекта на коэффициент восстановления скорости шара с использованием стальной пластины большего размера [4].

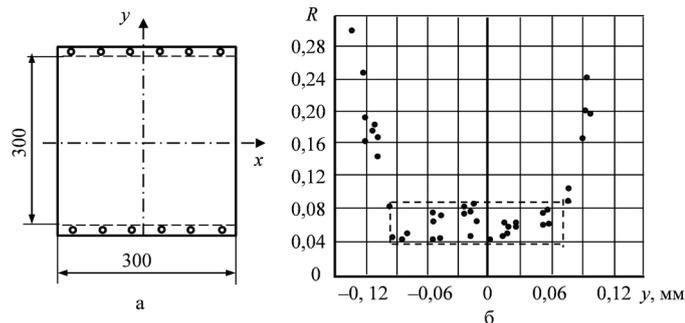


Рисунок 2 – Размеры пластины (а) и зависимость коэффициента восстановления скорости шара от координаты точки удара (б)

При этом, как и ранее, два противоположных края пластины были зажаты болтами на жестком основании, а два других – свободны. Пластина имела толщину 6,3 мм при размерах в плане 300×300 мм (рисунок 2, а). Удар по пластине наносился тем же стальным шаром диаметром 27,1 мм со скоростью 3,1 м/с

На рисунке 2, б видно, что в противоположность предыдущим экспериментам коэффициент восстановления скорости шара после удара в средней зоне пластины оказался меньше, чем у её краев. Для выяснения причин этого противоречия, как и в первом случае, был проведен расчет конструкционной податливости пластины в её средней зоне.

Общая формула для определения конструкционной податливости пластины в точке с координатами x_0, y_0 имеет вид [5]:

$$w(x_0, y_0, t) = \frac{1}{m_0} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{W_{ij}^2(x_0, y_0)}{\omega_{ij}^2} \iint_S W_{ij}^2(x, y) dx dy (1 - \cos \omega_{ij} t), \quad (2)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots; j = 1, 2, 3, \dots,$$

где $W(x, y)$ – собственная форма колебаний, м; ω_{ij} – собственная частота колебаний, с⁻¹; m_0 – масса одного квадратного метра пластины, кг/м², $m_0 = \rho \delta$; ρ – плотность материала пластины, кг/м³; δ – толщина пластины, м; x_0, y_0 – координаты точки приложения силы, м; t – текущее время.

При использовании асимптотического метода расчета колебаний пластин собственная форма колебаний для квадратной пластины с длиной стороны a определяется по формуле [6]:

$$W_{ij}(x, y) = C_0 \cos(\gamma_{1j} y) \cos(\gamma_{2i} x) + C_1 e^{-\alpha_{1ij}(0,5a \pm y)} \cos(\gamma_{2i} x) + C_2 e^{-\alpha_{2ij}(0,5a \pm x)} \cos(\gamma_{1j} y), \quad (3)$$

где $\gamma_1 = \pi / \Lambda_y, \gamma_2 = \pi / \Lambda_x, \Lambda_x, \Lambda_y$ – длины полуволн вдоль соответствующих осей; знак минус в экспоненциальных функциях соответствует положительным направлениям осей x, y , а знак плюс – отрицательным.

$$C_1 = -C_0 \cos 0,5\gamma_{1j} a, C_2 = C_0 \Theta_{ij} \cos 0,5\gamma_{2i} a, \quad (4)$$

$$\alpha_{1ij} = \sqrt{2\gamma_{2i}^2 + \gamma_{1j}^2} \quad \alpha_{2ij} = \sqrt{\gamma_{2i}^2 + 2\gamma_{1j}^2}, \quad (5)$$

$$\Theta_{ij} = \frac{v_{ij}^2 + \mu}{v_{ij}^2 + 2 - \mu}, \quad v_{ij} = \frac{\gamma_{2i}}{\gamma_{1j}}, \quad (6)$$

μ – коэффициент Пуассона.

Собственные частоты колебаний определяются по формуле:

$$\omega_{ij} = \alpha_{ij}^2 \sqrt{D / m_0}, \quad (7)$$

где

$$\alpha_{ij}^2 = \alpha_{1(ij)}^2 + \alpha_{2(ij)}^2, \quad D = \frac{E \delta^3}{12(1 - \mu^2)}, \quad (8)$$

E – модуль упругости материала пластины, Па.

Для рассматриваемой пластины:

$$m_0 = 49,14 \text{ кг/м}; \quad \sqrt{D / m_0} = 9,892 \text{ м}^2/\text{с}.$$

Частотные уравнения при двух защемленных противоположных сторонах пластины и свободных двух других сторонах имеют вид [6]:

$$\text{tg } 0,5\gamma_{1j} a = \sqrt{1 + 2v_{ij}^2},$$

$$\text{tg } 0,5\gamma_{2i} a = -\Theta_{ij}^2 \sqrt{1 + (2/v_{ij}^2)}. \quad (9)$$

В работе [5] предложена следующая методика определения параметров γ_{1j}, γ_{2i} . Вначале определяется низшая собственная частота системы. Для этого вводится коэффициент формы пластины, равный отношению её сторон ($k = b/a$) и записывается следующее соотношение, полученное из частотных уравнений системы:

$$k = \frac{2 \left[\arctg \left(-\Theta_{11}^2 \sqrt{1 + (2/v_{11}^2)} \right) + \pi \right]}{v_{11} \gamma_{11} a}. \quad (10)$$

Задаваясь значениями γ_{11} , вычисляя по формулам (1.7) v_{11} , Θ_{11} , можно подобрать значения γ_{11} , v_{11} , а затем и γ_{21} , удовлетворяющие заданному отношению сторон пластины. Определив эти значения, можно по формулам (6)–(8) рассчитать коэффициенты, определяющие форму колебаний (5), а по формуле (9) найти собственные частоты колебаний пластины.

Расчеты, выполненные по этой методике при указанных размерах пластины, и исходных данных: $E = 20,4 \cdot 10^{10}$ Па, $\rho = 7850$ кг/м³, $\mu = 0,3$, $k = 1$ показали, что условию (10) удовлетворяют следующие значения параметров γ_{11} и γ_{21} :

$$\gamma_{1j} = \frac{2\pi}{a} (j - 0,60155), \quad \gamma_{2i} = \frac{2\pi}{b} (i - 0,19495). \quad (11)$$

Результаты расчетов по приведенным выше формулам для форм колебаний с одинаковыми значениями i и j приведены в таблице 1.

В формуле (4) двойной интеграл, стоящий в знаменателе, умноженный на интенсивность массы m_0 , представляет собой обобщенную массу системы при данной форме колебаний, т. е.

$$\mathfrak{M} = m_0 \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} W_{ij}^2(x, y) dx dy. \quad (12)$$

Возводя функцию (5) в квадрат, получим подинтегральное выражение, состоящее из шести слагаемых:

$$\int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} W_{ij}^2(x, y) dx dy = C_0^2 (I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6).$$

Формулы для определения этих интегралов приведены в работе [5]. Их анализ показал, что в рассматриваемом случае с погрешностью, не превышающей 2,5 %, можно ограничиться только первым интегралом I_1 , поскольку по сравнению с ним остальные интегралы пренебрежимо малы. При этом для квадратной пластины с размером стороны a :

$$I_1 = \frac{1}{4} \left(a + \frac{1}{\gamma_{2i}} \sin(\gamma_{2i} a) \right) \left(a + \frac{1}{\gamma_{1j}} \sin(\gamma_{1j} a) \right).$$

Дальнейший анализ проводился для первой симметричной формы колебаний при $i = j = 1$. Основанием к этому являлось то, что с увеличением номера формы колебаний её амплитуда уменьшается, а собственная частота возрастает.

Например, в рассматриваемой системе вторая собственная частота в 6,5 раз больше, а третья в 17 раз больше первой. Поскольку частота стоит в знаменателе формулы (2) в квадрате, то учет второй формы колебаний даст уточнение в величине прогиба пластины не более чем на 2 %, а третьей формы – на 0,3 %.

С учетом этого формула для определения податливости пластины в точке с координатами x_0, y_0 принимает вид:

$$e = w(x_0, y_0) = \frac{2W_{11}(x_0, y_0)}{\omega_1^2 \mathfrak{M}}, \quad (13)$$

где

$$W_{11}(x, y) = C_0 [\cos(\gamma_1 x) \cos(\gamma_2 y) - e^{-\alpha_1(0,5a \pm x)} \cos(0,5\gamma_1 a) \cos(\gamma_2 x) + \Theta e^{-\alpha_2(0,5a \pm x)} \cos(0,5\gamma_2 a) \cos(\gamma_1 y)]. \quad (14)$$

Для первой формы колебаний получены следующие значения параметров: $\gamma_1 = 8,3451$ м⁻¹, $\gamma_2 = 16,861$ м⁻¹, $\alpha_1 = 25,263$ м⁻¹, $\alpha_2 = 20,581$ м⁻¹,

$$\Theta = 0,75789, \quad C_{10} = -0,31365, \\ C_{20} = -0,62014, \quad \omega_1 = 10503 \text{ с}^{-1}, \\ I_1 = 0,022673 \text{ м}^2, \quad \mathfrak{M} = 1,116 \text{ кг}.$$

Результаты расчета коэффициентов податливости и жесткости пластины в различных точках её поверхности вдоль оси y представлены в таблице 1.

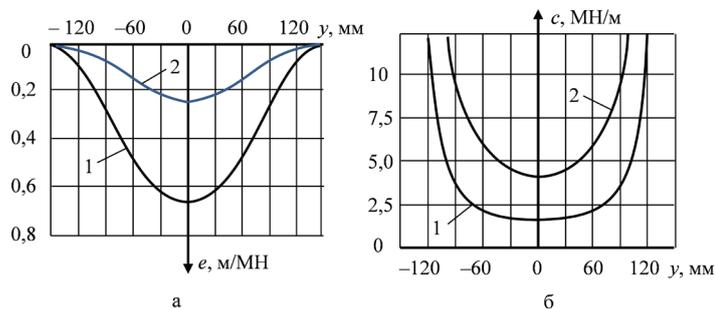
На рисунке 3 показаны графики изменения коэффициента податливости (позиция а) и коэффициента жесткости (позиция б) пластины вдоль оси y в её средней части шириной 100 мм.

Сравнение графиков на рисунках 2 и 3 показало, что зависимость коэффициента восстановления скорости бойка от точки приложения ударной нагрузки качественно достаточно хорошо коррелирует с коэффициентом конструкционной жесткости пластины в данной точке, найденным теоретически по предлагаемому алгоритму. Этот коэффициент наименьший в средней полосе пластины шириной 120–150 мм (рисунок 2, б) и именно этот диапазон характеризуется наименьшим коэффициентом податливости пластины (рисунок 3, б). У заземленных краев пластины, как в первом, так и во втором экспериментах коэффициент восстановления примерно одинаковый и составляет 0,24–0,28.

Вместе с этим остается вопрос: почему при в первых экспериментах с использованием пластины с малыми размерами в плане коэффициент

Таблица 1 – Результаты расчета коэффициентов податливости и жесткости пластины в различных точках её поверхности

y , мм	0	± 30	± 60	± 90	± 120	± 150
	$x = 0$					
W_{11}/C_0	0,96460	0,92638	0,82013	0,64139	0,37686	0
e , м/МН	0,6680	0,6160	0,4828	0,2954	0,1020	0
c , МН/м	1,497	1,623	2,071	3,386	9,808	∞
	$x = \pm 50$ мм					
W_{11}/C_0	0,58128	0,55767	0,49258	0,38251	0,21814	0
e , м/МН	0,2426	0,2232	0,1742	0,1050	0,0342	0
c , МН/м	4,122	4,129	5,740	9,520	29,276	∞

Рисунок 3 – Зависимость коэффициента податливости пластины (а) и коэффициента жесткости (б) от координаты точки приложения нагрузки 1 – $x = 0$, 2 – $x = \pm 50$ мм

восстановления скорости шара после удара в центре пластины наибольший, а во втором эксперименте с использованием пластины больших размеров он наименьший? Для ответа на этот вопрос необходимо продолжить эксперименты в данном направлении.

Основным результатом данной работы является алгоритм определения зависимости конструкционной податливости и жесткости пластины от координаты точки приложения ударной нагрузки, который дает результат, качественно совпадающий с зависимостью коэффициента восстановления скорости шара после удара. Для дальнейшего уточнения этого алгоритма необходимо учесть пластические деформации в контакте соударяющихся тел. Это является задачей дальнейшей работы.

Литература

1. Еремьянц В.Э. О влиянии коэффициента восстановления скорости при ударе на работу виброударных машин / В.Э. Еремьянц // Вестник КРСУ. 2017. Т. 17. № 5. С. 20–24.
2. Еремьянц В.Э. Влияние конструкционной податливости объекта на коэффициент восстановления скорости при ударе / В.Э. Еремьянц, Р.Е. Васильков // Проблемы механики современных машин: матер. VI межд. конф. Улан-Удэ: Изд. ВСГУТУ, 2015. Том 1. С. 103–108.
3. Васильков Р.Е. Влияние координат приложения внешней силы на податливость поверхности короба / В.Э. Еремьянц, Р.Е. Васильков, Л.Т. Панова // Современные техника и технологии в научных исследованиях: матер. 6-й межд. конф. молодых ученых. Бишкек: Научная станция РАН, 2014. С. 193–197.
4. Еремьянц В.Э. К оценке влияния конструкционной податливости объекта на коэффициент восстановления скорости сферы при ударе / В.Э. Еремьянц, Р.Е. Васильков // Машиностроение / Имаш НАН КР. 2018. № 1(7). С. 15–21.
5. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел / В. Гольдсмит; пер. с англ. М.С. Лужиной и О.В. Лузина. М.: Изд-во литературы по строительству, 1965. 448 с.
6. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний: учебное пособие для вузов / В.Л. Бидерман. М.: Высш. школа, 1972. 416 с.