УДК 517.97

ОБ УСЛОВИЯХ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧЕ МИНИМИЗАЦИИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛА

Э.Ф. Абдылдаева, Э. Осмонова, Каныбек кызы Мархаба

Исследован кусочно-линейный функционал, определенный на множестве решений краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения с интегральным оператором Фредгольма. Рассматривается колебательный процесс, происходящий под действием граничных внешних сил. Показано обобщенное решение краевой задачи управляемого процесса. Отмечено, что процесс, описываемый краевой задачей, является управляемым, если существует хотя бы одно управление, при котором краевая задача имеет решение. С учетом того, что между элементами пространства управлений и пространства состояний управляемого процесса существует взаимно однозначное соответствие, вычислено приращение функционала и выписана функция Гамильтона–Понтрягина. Далее эта функция исследована на максимум, и как следствие, получены соотношения для определения оптимальности управления, которые называются условиями оптимальности. Однако эти условия оказались непригодными для определения оптимального управления, т. е. было установлено, что при минимизации кусочно-линейного функционала принцип максимума вырождается. Тем не менее попытка определения оптимального управления привела к выводу уравнений, с помощью которых могут могут быть определены особые оптимальные управления.

Ключевые слова: краевая задача; кусочно-линейный функционал; обобщенное решение; условие оптимальности; принцип максимума; оптимальное управление.

БӨЛҮК-СЫЗЫКТУУ ФУНКЦИОНАЛДЫ МИНИМАЛДАШТЫРУУ МАСЕЛЕСИНДЕ ОПТИМАЛДУУЛУК ШАРТТАРЫ ЖӨНҮНДӨ

Э.Ф. Абдылдаева, Э. Осмонова, Каныбек кызы Мархаба

Бул макалада Фредгольмдун интегралдык оператору катышкан интегралдык-дифференциалдык теңдеме үчүн коюлган чектик маселенин көптөгөн чыгарылыштарында аныкталган бөлүк-сызыктуу функционал изилдөөгө алынган. Чектешкен тышкы күчтөрдүн таасири менен болгон термелүү процесси каралган. Башкаруу процессинин чектик маселесинин жалпыланган чыгарылышы көрсөтүлгөн. Эгерде чектик маселе чыгарылышка ээ болгон жок дегенде бир башкаруу функциясы болсо, чектик маселе менен сүрөттөлгөн процессти башкарууга болору белгиленген. Башкаруу мейкиндигинин элементтери менен башкарылуучу процесстин абал мейкиндигинин ортосунда бири-бирине дал келүүчүлүгүн эске алуу менен, функционалдык өсүш эсептелген жана Гамильтон–Понтрягин функциясы жазылган. Андан ары бул функция максималдуу изилденген, жана анын натыйжасында башкаруунун оптималдуулугун аныктоо үчүн шайкештиктер алынган, алар оптималдуулук шарттары деп аталат. Бирок бул шарттар оптималдуу башкарууну аныктоо үчүн жараксыз болуп чыкты, башкача айтканда бөлүк-сызыктуу функцияны минималдаштырууда максималдуу принцип начарлап кетери аныкталды. Ошондой болсо да, оптималдуу башкаруу функциясын аныктоого жасалган аракеттердин натыйжасында өзгөчө оптималдуу башкаруу функцияларын аныктай турган теңдемелер алынды.

Түйүндүү сөздөр: чектик маселе; бөлүк-сызыктуу функционал; жалпыланган чыгарылыш; оптималдуулук шарттары; максимум принциби; оптималдуу башкаруу.

ON OPTIMALITY CONDITIONS IN THE MINIMIZATION PROBLEM OF PIECEWISE LINEAR FUNCTIONAL

E.F. Abdyldaeva, E. Osmonova, Kanybek kyzy Marhaba

In the paper, the piecewise linear functional defined on the set of solutions of boundary value problem for the integro-differential equation with Fredholm integral operator is investigated. An oscillatory process under the influence of boundary external forces is considered. In the study, information on the generalized solution of the boundary value problem for controlled process is presented, at first. Note that the process described by boundary value problem is controllable, if there is at least one control at which boundary value problem has a solution. It is noted that the generalized solution of boundary value problem is an element of Hilbert space of square-summable functions. Taking into account the fact that there is a one-to-one correspondence between elements of control space and state space of the controlled process, the functional increment is calculated and the Hamilton-Pontryagin function is obtained. Further, maximum of Hamilton-Pontryagin function is investigated, and as a consequence, relations for determining the optimality of control are obtained, which are called optimality conditions. However, these conditions turned out to be unsuitable for determining the optimal control, i.e. it is established that the maximum principle degenerates while minimizing piecewise linear functional. However, an effort to determine the optimal control has led to equations from which specific optimal controls is determined.

Keywords: boundary value problem; piecewise linear functional; generalized solution; optimal control; maximum principle; optimality conditions.

Среди задач оптимального управления задача минимизации кусочно-линейного функционала на множестве решений той или иной краевой задачи, имеет специфические особенности [1]. В данной статье исследованы условия оптимальности, полученные на основе принципа максимума для систем с распределенными параметрами [2] и изучены их особенности. В частности, установлено, что в этой ситуации искомое оптимальное управление может быть найдено из других условий как особое оптимальное управление.

Постановка задачи оптимизации. Рассмотрим задачу минимизации кусочно-линейного функционала:

$$J[u(t)] = \int_0^1 [V(T,x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T |u(t)| dt , \quad \beta > 0, \tag{1}$$

на множестве решений краевой задачи:

$$V_{tt} = V_{xx} + \lambda \int_0^T K(t,\tau) V(\tau,x) d\tau, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le T \tag{2}$$

$$V(0,x) = \psi_1(x), \ V_t(0,x) = \psi_2(x), \ 0 < x < 1, \tag{3}$$

$$V_x(t,0) = 0, \quad V_x(t,1) + \alpha V(t,1) = u(t) , \tag{4}$$

где $u(t)$ – функция граничного управления; $K(t,\tau)$ – заданная функция, определенная в области $D = \{0 \le t \le T, 0 \le \tau \le T\}$ и удовлетворяет условию:

$$\int_0^T \int_0^T K^2(t,\tau) d\tau dt = K_0 < \infty, \tag{5}$$

т. е. $K(t,\tau) \in H(D)$; $\xi(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ – заданные функции из пространства $H(0,1)$, причем функция $\psi_1(x)$ имеет обобщенную производную первого порядка; λ – параметр; T – фиксированный момент времени, постоянная, $H(Y)$ – гильбертово пространство квадратично суммируемых функций, определенных на множестве Y .

Обобщенное решение краевой задачи. Известно [3, 4], что краевая задача (2)–(4) при заданных условиях имеет единственное слабо обобщенное решение:

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) z_n(x), \tag{6}$$

где система функций $z_n(x)=\sqrt{\dfrac{2(\lambda_n^2+\alpha^2)}{\lambda_n^2+\alpha^2+\alpha}}\cos\lambda_n x$ при каждом фиксированном $n=1,2,3,\ldots,$ опеделяется как решение краевой задачи:

$$z''_n(x)+\lambda_n^2 z_n(x)=0,\ \ z'_n(0)=0,\ \ z'_n(1)+\alpha z_n(1)=0,$$

и образуют полную ортонормированную систему в гильбертовом пространстве $H(0,1)$, а соответствующие собственные значения λ_n определяются как решения трансцендентного уравнения $\lambda tg\lambda=\alpha$ и удовлетворяют следующим условиям:

$$\lambda_n\le\lambda_{n+1},\forall n=1,2,3,\ldots,\quad \lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty.\ \ (n-1)\pi<\lambda_n<\frac{\pi}{2}(2n-1),\quad n=1,2,3,...,$$

а коэффициенты Фурье $V_n(t)$ определяются соотношениями:

$$V_n(t)=\psi_n(t,\lambda)+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^T D_n(t,\tau,\lambda)z_n(1)u(\tau)d\tau, \tag{7}$$

$$\psi_n(t,\lambda)=\psi_n\left[\cos\lambda_n s+\lambda\int_0^t B_n(t,s,\lambda)cos\lambda_n sds\right]+\frac{1}{\lambda_n}\psi_{2n}\left[\sin\lambda_n t+\lambda\int_0^t B_n(t,s,\lambda)\sin\lambda_n sds\right], \tag{8}$$

$$D_n(t,s,\lambda)=\begin{cases}\sin\lambda_n(t-\tau)+\lambda\int_0^t B_n(t,s,\lambda)\sin\lambda_n(s-\tau)ds, & 0\le\tau\le t,\\ \int_0^t B_n(t,s,\lambda)\sin\lambda_n(s-\tau)ds, & t\le\tau\le T,\end{cases} \tag{9}$$

$$B_n(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s),\quad n=1,2,3,...\ ; \tag{10}$$

резольвента ядра:

$$K_n(t,s)=\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t sin\lambda_n(t-\tau)K(\tau,s)d\tau,\ \ K_n(0,s)=0,$$

а повторные ядра $K_{n,i}(t,s)$ при каждом фиксированном $n=1,2,3,\ldots,$ определяются по формулам:

$$\begin{aligned}&K_{n,i+1}(t,s)=\int_0^T K_n(t,\tau)K_{n,i}(\tau,s)d\tau,\quad i=1,2,3,...,\\&K_{n,1}(t,s)\equiv K_n(t,s).\end{aligned} \tag{11}$$

Согласно равенствам (10)–(11) имеет место следующая оценка:

$$\left|B_n(t,s,\lambda)\right| \le \sqrt{T}\,\frac{\sqrt{\int_0^T K_n^2(\tau,s)d\tau}}{\lambda_n - |\lambda| T\sqrt{K_0}}, \tag{12}$$

которая выполняется для значений λ, удовлетворяющих следующему неравенству:

$$|\lambda|\frac{T}{\lambda_n}\sqrt{K_0} < 1, \quad n = 1,2,3,.... \tag{13}$$

Используя неравенства (12) получаем оценку:

$$\int_0^T \left|B_n(t,s,\lambda)\right|^2 ds \le \frac{K_0 T}{\left(\lambda_n - |\lambda| T\sqrt{K_0}\right)^2}. \tag{14}$$

Ряд Неймана (10) абсолютно сходится при каждом фиксированном $n = 1,2,3,...$ для значений параметра λ, удовлетворяющих условию:

$$\lambda < \frac{\lambda_n}{T\sqrt{K_0}}. \tag{15}$$

Заметим, что радиус сходимости $\left|\lambda\right| < \dfrac{\lambda_n}{T\sqrt{K_0}}$ ряда Неймана увеличивается с ростом n и резольвента $B_n(t,s,\lambda)$ является непрерывной функцией, как сумма абсолютно сходящегося ряда.

Отметим, что при значениях параметра $\left|\lambda\right| < \dfrac{\lambda_1}{T\sqrt{K_0}}$ ряд Неймана абсолютно сходится к непрерывной функции для любого (!) $n = 1,2,3,...$ Доказано, что построенное обобщенное решение $V(t,x)$ краевой задачи (2)–(4) является элементом пространства H(Q).

Условия оптимальности. Минимизация кусочно-линейного функционала (1) обладает рядом специфических особенностей, которые возникают при использовании принципа максимума для систем с распределенными параметрами [2] .

В краевой задаче (2)–(4) каждое управление $u(t)$ единственным образом определяет управляемый процесс $V(t,x)$, т. е. управлению $u(t) + \Delta u(t)$ соответствует функция $V(t,x) + \Delta V(t,x)$, где $\Delta V(t,x)$ – приращение, соответствующее приращению $\Delta u(t)$. С учетом этого обстоятельства вычислим приращение функционала (1), которое можно представить в следующем виде:

$$\Delta J[u] = J[u+\Delta u] - J[u] = -\int_0^T \Delta \prod[t,x,V(t,x),\omega(t,x),u(t)]dt + \\ + \int_Q \left[\Delta V^2(T,x)\right]dx, \tag{16}$$

где

$$\prod(t,x,V(t,x),\omega(t,x),u(t)) = \omega(t,1)u(t) - \beta\left|u(t)\right|, \tag{17}$$

а функция $\omega(t,x)$ определяется как решение сопряженной краевой задачи:

$$\omega_{tt}(t,x) = \omega_{xx}(t,x) - \lambda\int_0^T K(\tau,t)\omega(\tau,x)d\tau,\ \ 0 < x < 1,\ \ 0 \le t < T,$$

$$\omega(\mathrm{T},x) = 0, \quad \omega_t(\mathrm{T},x) - 2[V(T,x) - \xi(x)] = 0,$$

$$\omega_x(t,0) = 0, \quad \omega_x(t,1) + \alpha\omega(t,1) = 0. \qquad (18)$$

Условие оптимальности управления $u(t)$ как следствие принципа макимума имеет вид:

$$\prod_u (t,x,V(t,x),\omega(t,x),u(t)) = \omega(t,1) - \beta sign \quad u(t) = 0, \qquad (19)$$

$$\prod_{uu} (t,x,V(t,x),\omega(t,x),u(t)) = 0\,. \qquad (20)$$

Следует отметить, что в рассматриваемом случае принцип максимума вырождается, иначе говоря, из этих условий нельзя извлечь информацию об оптимальности управления $u(t)$, т. е. вопрос об оптимальности управления остается открытым. Тем не менее, можно попытаться найти управления, которые удовлетворяют условию (19), и исследовать их на оптимальность. Если такие управления существуют, то их называют особыми оптимальными управлениями.

Будем исследовать условие (19). При этом следует различать случаи:

Случай 1. Пусть *u(t)>0*. В этой области соотношение (19) примет вид:

$$\omega(t,1) = \beta. \qquad (21)$$

Случай 2. Пусть *u(t) <0*. В этой области соотношение (19) примет вид:

$$\omega(t,1) = -\beta. \qquad (22)$$

В уравнениях (21) и (22) функция $\omega(t,x)$, как решение сопряженной краевой задачи (18), содержит управление $u(t)$ как функциональную переменную, т. е. $\omega(t,x) = \omega\left[t,x,u(t)\right]$. Это обстоятельство позволяет определить управление $u(t)$ как решение уравнения (21) или (22). Разрешимость уравнения (21) или (22) требует дополнительных исследований.

Литература

1. *Kerimbekov Akylbek*. On the problem of minimization of the piecewise linear functional in distributed optimal control of oscillation processes / Akylbek Kerimbekov, Elmira Abdyldaeva // Proceedings of V Congress of the Turkic world mathematicians. Bishkek, 2014. P. 187–192.
2. *Egorov A.I.* Optimal control of thermal and diffusion processes / A.I. Egorov. M.: Nauka, 1978. 464 p.
3. *Abdyldaeva Elmira*. Generalized solution of boundary value problem with an inhomogeneous boundary condition / Elmira Abdyldaeva, Gulbarchyn Taalaibek kyzy, Bermet Anarkulova // Manas Journal of Engineering. 2019. Vol. 7 (Iss. 2). P. 157–165.
4. *Керимбеков А.* Слабо обобщенное решение краевой задачи граничного управления упругими колебаниями, описываемыми фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями / А. Керимбеков, Э.Ф. Абдылдаева // Вестник КРСУ. 2015. Т. 15. № 9. С. 23–28.