УДК 511.1

НЕСТАРЕЮЩИЕ МАГИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ. ЧАСТЬ. 2

С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова

Квадратная таблица, у которой сумма чисел, стоящих в каждом столбце, каждой строке и на обеих диагоналях всегда одна и та же, называется магическим квадратом. В данной работе мы говорим о некоторых общих методах построения магических квадратов четного порядка. Эта работа является второй частью нашей работы, с таким же названием. Показано, что и в случае квадратов четного порядка для построения бесконечного числа магических квадратов достаточно опираться на несколько квадратов, заполненных членами арифметической прогрессии. Несмотря на то, что история магических квадратов насчитывает несколько тысячелетий, все еще появляются новые способы построения магических квадратов. В данной работе описан новый способ построения магических таблиц порядков 6, 10, 14, … , использующий разбиение таблицы на внутреннюю, порядка 4, 8, 12, … , и внешнюю полоску.

Ключевые слова: магические квадраты; новый способ построения.

КАРЫБАС СЫЙКЫРДУУ КВАДРАТТАР. 2-БӨЛҮК

Ар бир мамычасында, ар бир жолчосунда жана эки диагоналында турган сандардын суммасы дайыма бирдей болгон квадраттык таблицалар сыйкырдуу квадраттар деп аталат. Бул эмгекте биз так тартиптеги сыйкырдуу квадраттарды түзүүгө тиешелүү жалпы ыкмалар тууралуу сөз кылабыз. Бул эмгек ушундай эле аталыштагы биздин эмгектин экинчи бөлүгү болуп эсептелет. Так тартиптеги квадраттарды түзгөндөгүдөй эле, сыйкырдуу квадраттардын чексиз санын түзүү үчүн арифметикалык прогрессиянын мүчөлөрү менен толтурулган бир нече квадраттарга таянышыбыз жетиштүү экендиги көрсөтүлгөн. Сыйкырдуу квадраттардын тарыхы көп кылымдан бери уланып келе жаткандыгына карабастан, дагы эле сыйкырдуу квадраттарды түзүүнүн жаңы ыкмалары пайда болууда. Бул эмгекте таблицаны ички, 4, 8, 12, … , тартиптеги жана тышкы мамычага бөлүү аркылуу 6, 10, 14, … , тартиптеги сыйкырдуу таблицаны түзүүнүн жаңы ыкмасы сүрөттөлгөн.

Түйүндүү сөздөр: сыйкырдуу квадраттар; сыйкырдуу квадраттарды түзүүнүн жаңы ыкмасы.

ETERNAL MAGIC SQUARES. PART 2

S.K. Kydyraliev, A.B. Urdaletova

A square table, in which the sum of the numbers in each column, each row and on both diagonals is always the same, is called a magic square. In this paper, we are talking about some common methods for constructing magic squares of even order. This work is the second part of our work, with the same name. It is shown that in the case of squares of even order, to construct an infinite number of magic squares, it suffices to rely on several squares filled with members of an arithmetic progression. Despite the fact that the history of magic squares dates back several millennia, new ways of constructing magic squares still appear. This paper describes a new method for constructing magic tables of orders 6, 10, 14, ..., using the partitioning of a table into an internal one, of the order of 4, 8, 12, ..., and an external strip.

Keywords: magic squares; new way to construct.

1. Магический квадрат – это квадратная таблица, у которой сумма чисел, стоящих в каждом столбце, каждой строке и на обеих главных диагоналях, всегда одна и та же.

Одним из наиболее известных является магический квадрат, который изображён на гравюре одного из величайших представителей западноевропейского Ренессанса, немецкого художника Альбрехта Дюрера «Меланхолия I». Два средних числа в нижнем ряду указывают дату создания гравюры (1514). Сумма чисел на любой горизонтали, вертикали и диагонали равна 34. Эта сумма также встречается во всех угловых квадратах 2×2, в центральном квадрате (10 + 11 + 6 + 7), в квадрате из угловых клеток (16 + 13 + 4 + 1), в квадратах, построенных «ходом коня» (2 + 12 + 15 + 5 и 3 + 8 +

14 + 9), в вершинах прямоугольников, параллельных диагоналям (2 + 8 + 15 + 9 и 3 + 12 + 14 + 5), в прямоугольниках, образованных парами средних клеток на противоположных сторонах (3 + 2+ 15 + 14 и 5+ 8 + 9 +12). Большинство дополнительных симметрий связано с тем, что сумма любых двух центрально симметрично расположенных чисел равна 17.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

2. Покажем, как можно построить магические квадраты порядка *4n*, где *n* – натуральное число. Для того чтобы составить магическую таблицу четвертого порядка, используем «прямую» и «обратную» таблицы:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

16	15	14	13
12	11	10	9
8	7	6	5
4	3	2	1

Теперь в «прямой» таблице оставим числа, стоящие на диагоналях, и удалим остальные:

1			4
	6	7	
	10	11	
13			16

Затем дополним очищенные клетки числами, стоящими в соответствующих клетках «обратной» таблицы:

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Несложно убедиться в том, что получился магический квадрат с суммой 34. Мы не знаем, кому принадлежит этот замечательный способ составления магической таблицы. В данном случае нам остается только восхищаться!

Точно так же, как для таблиц третьего порядка можно показать, что если вместо чисел магического квадрата вставить члены арифметической прогрессии, то получится другой магический квадрат.

Например, если $a_0 = -25;\ d = 7$:

–25 + 1·7 = –18	–25 + 15·7 = 80	–25 + 14·7 = 73	–25 + 4·7 = 3
–25 + 12·7 = 59	–25 + 6·7 = 17	–25 + 7·7 = 24	–25 + 9·7 = 38
–25 + 8·7 = 31	–25 + 10·7 = 45	–25 + 11·7 = 52	–25 + 5·7 = 10
–25 + 13·7 = 66	–25 + 3·7 = –4	–25 + 2·7 = –11	–25 + 16·7 = 87

получится магический квадрат с суммой 138. Можно повторить процесс, взяв получившиеся числа в качестве номеров членов другой арифметической прогрессии и получить следующую серию магических квадратов. Понятно, что магичность квадратов порядка 4 не изменится в результате некоторых поворотов и симметричных преобразований таблицы.

3. Для того чтобы отойти от арифметической прогрессии, опять же можно действовать как и в случае таблиц третьего порядка. Разобьем числа арифметической прогрессии, заполняющие магический квадрат на четыре группы: 1, 2, 3, 4; 5, 6, 7, 8; 9, 10, 11, 12 и 13, 14, 15, 16, и используем номер группы как индекс:

1_1	15_4	14_4	4_1
12_3	6_2	7_2	9_3
8_2	10_3	11_3	5_2
13_4	3_1	2_1	16_4

В результате обнаружим, что в каждом столбце и на каждой из двух диагоналей присутствуют по одному элементу из каждой группы элементов таблицы. В первой и четвертой строке имеются элементы групп с теми же номерами, во второй и третьей строке – то же самое. Поэтому, для того чтобы сохранить магичность квадрата, нужно попарно «уравновесить» элементы данных строк.

Например, давайте к элементам первой группы добавим по 20, а от элементов четвертой группы, соответственно, вычтем по 20. Одновременно с этим, к элементам второй группы добавим по 30, а от элементов третьей группы, соответственно, вычтем по 30. Осталось убедится в том, что получился магический квадрат:

11 + 20 = 21	154 – 20 = 5	144 – 20 = –6	41 + 20 = 24
123 – 30 = –18	62 + 30 = 36	72 + 30 = 37	93 – 30 = –21
82 + 30 = 38	103 – 30 = –20	113 – 30 = –19	52 + 30 = 35
134 – 20 = –7	31 + 20 = 23	21 + 20 = 22	164 – 20 = –4

4. Чувство восхищения изложенным выше методом построения таблицы порядка 4 увеличивается от того, что он позволяет составить магический квадрат для любого порядка $4n$, где n – натуральное число. В качестве примера построим магический квадрат порядка 12. Для этого поступим так же, как и в случае магического квадрата порядка 4.

Возьмем «прямую»:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132
133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144

и «обратную» таблицы:

144	143	142	141	140	139	138	137	136	135	134	133
132	131	130	129	128	127	126	125	124	123	122	121
120	119	118	117	116	115	114	113	112	111	110	109
108	107	106	105	104	103	102	101	100	99	98	97
96	95	94	93	92	91	90	89	88	87	86	85
84	83	82	81	80	79	78	77	76	75	74	73
72	71	70	69	68	67	66	65	64	63	62	61
60	59	58	57	56	55	54	53	52	51	50	49
48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37
36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25
24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Теперь разобьём «прямую» таблицу на подтаблицы размером 4×4, и в каждой из 9 полученных подтаблиц оставим числа, стоящие на диагоналях:

1			4	5			8	9			12
	14	15			18	19			22	23	
	26	27			30	31			34	35	
37			40	41			44	45			48
49			52	53			56	57			60
	62	63			66	67			70	71	
	74	75			78	79			82	83	
85			88	89			92	93			96
97			100	101			104	105			108
	110	111			114	115			118	119	
	122	123			126	127			130	131	
133			136	137			140	141			144

Далее, как и в случае таблицы 4×4, дополним очищенные клетки числами, стоящими в соответствующих клетках «обратной» таблицы:

1	**143**	**142**	*4*	*5*	**139**	**138**	*8*	*9*	**135**	**134**	*12*
132	*14*	*15*	**129**	**128**	*18*	*19*	**125**	**124**	*22*	*23*	**121**
120	*26*	*27*	**117**	**116**	*30*	*31*	**113**	**112**	*34*	*35*	**109**
37	**107**	**106**	*40*	*41*	**103**	**102**	*44*	*45*	**99**	**98**	*48*
49	**95**	**94**	*52*	*53*	**91**	**90**	*56*	*57*	**87**	**86**	*60*
84	*62*	*63*	**81**	**80**	*66*	*67*	**77**	**76**	*70*	*71*	**73**
72	*74*	*75*	**69**	**68**	*78*	*79*	**65**	**64**	*82*	*83*	**61**
85	**59**	**58**	*88*	*89*	**55**	**54**	*92*	*93*	**51**	**50**	*96*
97	**47**	**46**	*100*	*101*	**43**	**42**	*104*	*105*	**39**	**38**	*108*
36	*110*	*111*	**33**	**32**	*114*	*115*	**29**	**28**	*118*	*119*	**25**
24	*122*	*123*	**21**	**20**	*126*	*127*	**17**	**16**	*130*	*131*	**13**
133	**11**	**10**	*136*	*137*	**7**	**6**	*140*	*141*	**3**	**2**	*144*

Осталось убедиться в том, что получился магический квадрат с магической суммой 870.

5. Далее будем говорить о построении магических квадратов порядка $4n + 2$. Эта задача оказывается достаточно простой, так как мы умеем строить магические квадраты порядка $4n$: будет достаточно построить «окаймляющую полоску». Что мы имеем в виду?

Давайте продемонстрируем метод, построив магический квадрат порядка 6х6, заполненный числами $1, 2, 3, \ldots, 35, 36$. Так как сумма членов этой арифметической прогрессии $(1 + 36)36/2 = 666$, соответствующее магическое число: $666/6 = 111$. Поэтому нужно выбрать 16 членов этой прогрессии и построить из них «внутренний» магический квадрат 4×4. Оставшиеся числа необходимо расставить в первой и шестой строках, а также в первом и шестом столбцах так, чтобы сумма их элементов равнялась 111, а также чтобы числа в других строках и столбцах нужным образом дополняли элементы «внутреннего квадрата». Понятно, что эта программа может быть осуществлена разными способами. Один из них: для «окаймляющей полоски» возьмем первые: $1, 2, \ldots, 10$ и последние: $27, 28, \ldots, 35, 36$ десять членов прогрессии и поставим $1, 2, 35, 36$ в угловых клетках. Итак, можно сделать «черновой набросок» будущей таблицы:

1					2
	11	12	13	14	
	15	16	17	18	
	19	20	21	22	
	23	24	25	26	
35					36

Некоторые из оставшихся чисел: $3, 4, \ldots, 10, 27, 28, \ldots, 33, 34$ используем для того чтобы дополнить первую строку до суммы 111: для этого возьмем числа 9, 32, 33, 34.

В последней строке поставим парные, дополняющие эти числа до 37, элементы:

1	9	32	33	34	2
	26	25	24	23	
	22	21	20	19	
	18	17	16	15	
	14	13	12	11	
35	28	5	4	3	36

В итоге, последняя строка та, которая нужна. Вы наверно заметили, что мы записали внутреннюю «прямую» и «обратную» таблицы – попутно мы строим «внутреннюю» магическую таблицу.

Теперь дополним первый столбец до магического оставшимися членами арифметической прогрессии. Для этого нужно взять числа, дающие в сумме: $111 - (1 + 35) = 75$:

1	*9*	*32*	*33*	*34*	*2*
6	11			14	
10		16	17		
29		20	21		
30	23			26	
35	28	5	4	3	36

Осталось заполнить оставшиеся клетки последнего столбца числами, дополняющими числа первого да суммы 37. При этом во внутренней таблице в «прямой» оставили диагональные элементы, в другие клетки впишем элементы «обратной»:

1	*9*	*32*	*33*	*34*	*2*
6	11	25	24	14	*31*
10	22	16	17	19	*27*
29	18	20	21	15	*8*
30	23	13	12	26	*7*
35	*28*	*5*	*4*	*3*	*36*

Как мы уже отмечали, элементы для «внутренней» таблицы и «окаймляющей полоски» можно выбирать различными способами. Для подкрепления этого тезиса, продемонстрируем еще две таблицы.

В первой из них, элементы «внутренней» таблицы и «окаймляющей полоски», будут те же:

1	*33*	*31*	*29*	*7*	*10*
5	11	25	24	14	*32*
35	22	16	17	19	*2*
34	18	20	21	15	*3*
9	23	13	12	26	*28*
27	*4*	*6*	*8*	*30*	*36*

В то же время, элементы «внутренней» таблицы и «окаймляющей полоски» могут выбираться по-другому. Например:

15	36	4	5	35	*16*
6	7	29	28	10	*31*
17	26	12	13	23	*20*
18	14	24	25	11	*19*
34	27	9	8	30	*3*
21	*1*	*33*	*32*	*2*	*22*

В заключение заметим, что этот подход, использующий «внутренний» магический квадрат порядка $4n$ и «окаймляющую полоску», позволяет строить магические квадраты порядка $4n + 2$ и для других значений n.

Итак, мы обсудили методы построения магических квадратов любого порядка, а также, опираясь на имеющиеся квадраты, смогли получить неограниченное количество других магических квадратов тех же порядков. Существуют и другие методы построения магических квадратов. О них можно узнать, обратившись к соответствующей математической литературе [1–7]. Желаем успехов!

Литература

1. *Кордемский Б.А.* Математическая смекалка / Б.А. Кордемский. М.: Книга по требованию, 2012. 185 с.
2. *Постников М.М.* Магические квадраты / М.М. Постников. М.: URSS, 2017. 88 с.
3. *Гуревич Е.Я.* Тайна древнего талисмана / Е.Я. Гуревич. М.: Наука, 1969.
4. *Гарднер М.* Математические досуги / М. Гарднер. М.: Мир, 1972.
5. Энциклопедический словарь юного математика / сост. А.П. Савин. М.: Педагогика, 1989. 352 с.
6. *Чебраков Ю.В.* Теория магических матриц / Ю.В. Чебраков. СПб., 2008.
7. Магический квадрат. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/ (дата обращения: 02.11.2018).