УДК 517.968.74

МЕТОД ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ЯДЕР И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ СЛАБО НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛЬТЕРРОВА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С НЕПОЛНЫМИ ЯДРАМИ

С. Искандаров, Н.А. Абдирайимова

Устанавливаются достаточные условия ограниченности на полуоси всех решений и их первых, вторых производных, т. е. устойчивости решений слабо нелинейного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка типа Вольтерра. Для этого развиваются: метод вспомогательных ядер; нестандартный метод сведения к системе; метод преобразования уравнений В. Вольтерра; метод срезывающих функций и метод интегральных неравенств. Строится иллюстративный пример.

Ключевые слова: вольтеррова интегро-дифференциальное уравнение третьего порядка; слабая нелинейность; устойчивость решений; метод вспомогательных ядер; нестандартный метод сведения к системе.

КӨМӨКЧҮ ЯДРОЛОР МЕТОДУ ЖАНА ТОЛУК ЭМЕС ЯДРОЛУУ СЫЗЫКТУУ СЫМАЛ ВОЛЬТЕРРА ТИБИНДЕГИ ҮЧҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ ИНТЕГРАЛДЫК-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫНЫН ТУРУКТУУЛУГУ

С. Искандаров, Н.А. Абдирайимова

Бул макалада Вольтерра тибиндеги үчүнчү тартиптеги сызыктуу эмес интегралдык-дифференциалдык теңдеменин бардык чыгарылыштарынын жана алардын биринчи, экинчи туундуларынын жарым окто чектелгендигинин, б.а. чыгарылыштарынын туруктуулугунун жетиштүү шарттары белгиленген. Бул үчүн кошумча ядролор методу, теңдемени системага стандарттык эмес келтирүү методу, В. Вольтерранын теңдемелерди өзгөртүп түзүү методу, кесүүчү функциялар методу жана интегралдык барабарсыздыктар методу өнүктүрүлөт. Иллюстративдик мисал берилет.

Түйүндүү сөздөр: Вольтерра тибиндеги үчүнчү тартиптеги интегралдык-дифференциалдык теңдеме; начар байкалган сызыктуу эместик; чыгарылыштардын туруктуулугу; кошумча ядролор методу; теңдемени системага стандарттык эмес келтирүү методу.

AUXILIARY KERNELS METHOD AND STABILITY OF SOLUTIONS OF WEAKLY NONLINEAR VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF THE THIRD ORDER WITH INCOMPLETE KERNELS

S. Iskandarov, N.A. Abdiraiimova

Sufficient conditions are established for the boundedness on the semi-axis of all solutions and their first and second derivatives, i.e., for the stability of solutions to a weakly non-linear third-order integro-differential equation of the Volterra type. For this purpose, the method of auxiliary kernels, the non-standard method of reduction to a system, the method of transformation of V. Volterra equations, the method of cutting functions and the method of integral inequalities are developed. An illustrative example is constructed.

Keywords: Volterra integro-differential equation of the third order; weak nonlinearity; stability of solutions; auxiliary kernel method; non-standard method of reduction to the system.

Все фигурирующие функции являются непрерывными при $t \ge t_0,\ t \ge \tau \ge t_0,\ |x|,\ |z| < \infty$ и соотношения имеют место при $t \ge t_0,\ t \ge \tau \ge t_0; \mathrm{I} = [t_0, \infty)$; ИДУ – интегро-дифференциальное уравнение. Под устойчивостью решений слабо нелинейного ИДУ третьего порядка понимается ограниченность на полуинтервале I всех его решений и их первых и вторых производных.

Задача. Установить достаточные условия устойчивости решений следующего ИДУ третьего порядка типа Вольтерра вида:

$$x'''(t) + a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + \int_{t_0}^{t} Q_0(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t) +$$

$$+F(t, x(t), \int_{t_0}^{t} h(t,\tau,x(\tau))d\tau), \quad t \ge t_0 \tag{1}$$

в случае выполнения условия:

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{t} |Q_0(t,\tau)| d\tau dt = \infty \tag{Q_0}$$

и при слабой нелинейности:

$$|F(t,x,z)| \le F_0(t) + g_0(t)|x| + g_1(t)|z|, \qquad |h(t,\tau,x)| \le g_2(t,\tau)|x| \tag{SN}$$

с неотрицательными $F_0(t), g_0(t), g_1(t), g_2(t,\tau)$.

В ИДУ (1) отсутствуют ядра с $x'(\tau)$ и $x''(\tau)$. Такое уравнение называется ИДУ с неполными ядрами по аналогии с [1, 2].

Под решением ИДУ (1) понимается решение $x(t) \in C^3(I, R)$ с любыми начальными данными $x^{(k)}(t_0)$ $(k = 0,1,2)$. В силу условия *(SN)* такие решения ИДУ (1) существуют.

Поставленная нами задача ранее не изучена. Для ее решения развивается метод вспомогательных ядер [1, 2] в сочетании с нестандартным методом сведения к системе [4], методом преобразования уравнений В. Вольтерра [5, с. 194–217], методом срезывающих функций [3, с. 41; 6], и методом интегральных неравенств [7].

Приступим к получению основного результата.

Пользуясь идеей методов работ [1, 2], в ИДУ (1) вводим некоторое вспомогательное ядро $H_2(t,\tau)$ с $x''(\tau)$ по правилу “веса” [3, с. 114]:

$$Q_0(t,\tau)x(\tau) = Q_0(t,\tau)x(\tau) - H_2(t,\tau)x''(\tau) + H_2(t,\tau)x''(\tau). \tag{2}$$

Далее с учетом соотношения (2) проведем два раза подряд интегрирование по частям:

$$-\int_{t_0}^{t} H_2(t,\tau)x''(\tau)d\tau = -H_2(t,t)x'(t) + H_2(t,t_0)x'(t_0) + \int_{t_0}^{t} H'_{2\tau}(t,\tau)x'(\tau)d\tau =$$

$$= -H_2(t,t)x'(t) + H_2(t,t_0)x'(t_0) + H'_{2\tau}(t,t)x(t) - H'_{2\tau}(t,t_0)x(t_0) - \int_{t_0}^{t} H''_{2\tau\tau}(t,\tau)x(\tau)d\tau, \tag{3}$$

где $H'_{2\tau}(t,t) \equiv \frac{\partial H_2(t,\tau)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=t}$.

Тогда в силу соотношений (2), (3) ИДУ (1) сводится к следующему нагруженному ИДУ:

$$x'''(t) + a_2(t)x''(t) + \left[a_1(t) - H_2(t,t)\right]x'(t) + \left[a_0(t) + H'_{2\tau}(t,t)\right]x(t) +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\left\{\left[Q_0(t,\tau) - H''_{2\tau\tau}(t,\tau)\right]x(\tau) + H_2(t,\tau)x''(\tau)\right\}d\tau = f(t) - H_2(t,t_0)x'(t_0) +$$

$$+H'_{2\tau}(t,t_0)x(t_0) + F(t,x(t),\int_{t_0}^{t} h(t,\tau,x(\tau))d\tau),\ t \geq t_0. \tag{4}$$

Теперь в ИДУ (4) сделаем нестандартную замену [4]:

$$x''(t) + \lambda^2 x(t) = W(t)y(t), \tag{5}$$

где $0 \neq \lambda$ – некоторый вспомогательный параметр; $0 < W(t)$ – некоторая весовая функция; $y(t)$ – новая неизвестная функция.

Тогда ИДУ (4) сводится к следующей эквивалентной системе:

$$\begin{cases} x''(t) + \lambda^2 x(t) = W(t)y(t), \\ y'(t) + b_2(t)y(t) + b_1(t)x'(t) + b_0(t)x(t) + \\ +\int_{t_0}^{t}\left[T_0(t,\tau)x(\tau) + K(t,\tau)y(\tau)\right]d\tau = (W(t))^{-1}f(t) - (W(t))^{-1}H_2(t,t_0)x'(t_0) + \\ +(W(t))^{-1}H'_{2\tau}(t,t_0)x(t_0) + (W(t))^{-1}F(t,x(t),\int_{t_0}^{t} h(t,\tau,x(\tau))d\tau), \end{cases} \tag{6}$$

где $b_2(t) \equiv a_2(t) + W'(t)(W(t))^{-1}$, $b_1(t) \equiv [a_1(t) - H_2(t,t) - \lambda^2](W(t))^{-1}$,

$$b_0(t) \equiv [a_0(t) + H'_{2\tau}(t,t) - \lambda^2 a_2(t)](W(t))^{-1},$$

$$T_0(t,\tau) \equiv (W(t))^{-1}[Q_0(t,\tau) - H''_{2\tau\tau}(t,\tau) - \lambda^2 H_2(t,\tau)],$$

$$K(t,\tau) \equiv (W(t))^{-1}H_2(t,\tau)W(\tau).$$

Пусть [3]:

$$K(t,\tau) = \sum_{i=0}^{n} K_i(t,\tau), \tag{K}$$

$$(W(t))^{-1}f(t) = \sum_{i=0}^{n} f_i(t), \tag{f}$$

$\psi_i(t) \quad (i=1..n)$ – некоторые срезывающие функции;

$R_i(t,\tau) \equiv K_i(t,\tau)\left(\psi_i(t)\psi_i(\tau)\right)^{-1}, \quad E_i(t) \equiv f_i(t)\left(\psi_i(t)\right)^{-1} \qquad (i=1..n),$

$$R_i(t,t_0) = A_i(t) + B_i(t) \qquad (i=1..n), \tag{R}$$

$c_i(t) \quad (i=1..n)$ – некоторые функции.

Для произвольно фиксированного решения $(x(t), y(t))$ системы (6), аналогично [5, с. 194–217], ее первое уравнение умножаем на $x'(t)$, второе уравнение – на $y(t)$, затем сложим полученные соотношения, интегрируем в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, по аналогии с работой [3] вводим условия *(K), (f)*, функции $\psi_i(t),\ R_i(t,\tau),\ E_i(t) \quad (i=1..n),$ условие *(R)*, функции $c_i(t) \quad (i=1..n),$ используем леммы 1.4, 1.5 [6]. Вследствие этого приходим к следующему тождеству:

$$u(t) \equiv (x'(t))^2 + \lambda^2(x(t))^2 + (y(t))^2 + 2\int_{t_0}^{t} b_2(s)(y(s))^2 ds + \sum_{i=1}^{n}\{A_i(t)(Y_i(t,t_0))^2 + B_i(t)(Y_i(t,t_0))^2 -$$

$$-2E_i(t)Y_i(t,t_0) + c_i(t) - \int_{t_0}^{t}\left[B_i'(s)(Y_i(s,t_0))^2 - 2E_i'(s)Y_i(s,t_0) + c_i'(s)\right]ds + \int_{t_0}^{t} R_{i\tau}'(t,\tau)(Y_i(t,\tau))^2 d\tau\} \equiv$$

$$\equiv u(t_0) + 2\int_{t_0}^{t}\{W(s)y(s)x'(s) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[A_i'(s)(Y_i(s,t_0))^2 + \int_{t_0}^{s} R_{is\tau}''(s,\tau)(Y_i(s,\tau))^2 d\tau]\}ds +$$

$$+2\int_{t_0}^{t} y(s)\{f_0(s) - (W(s))^{-1}H_2(s,t_0)x'(t_0) + (W(s))^{-1}H_{2\tau}'(s,t_0)x(t_0) +$$

$$+(W(s))^{-1}F(s,x(s),\int_{t_0}^{s} h(s,\tau,x(\tau))d\tau) - b_1(s)x'(s) - b_0(s)x(s) -$$

$$-\int_{t_0}^{s}[T_0(s,\tau)x(\tau) + K_0(s,\tau)y(\tau)]d\tau\}ds, \tag{7}$$

где $Y_i(t,\tau) \equiv \int_{\tau}^{t}\psi_i(\eta)y(\eta)d\eta \quad (i=1..n), \quad u(t_0) = (x'(t_0))^2 + \lambda^2(x(t_0))^2 + (y(t_0))^2 + \sum_{i=1}^{n} c_i(t_0).$

Переходя от тождества (7) к интегральному неравенству, с учетом условия (SN), и применением леммы 1 [7] доказывается

Теорема. Пусть 1) выполняются условия *(Q0), (SN),* $\lambda \neq 0$, $W(t) > 0,$ *(K), (f), (R);* 2) $b_2(t) \geq 0;$ 3) $A_i(t) \geq 0, \qquad B_i(t) \geq 0, \qquad B_i'(t) \leq 0, \qquad R_{i\tau}'(t,\tau) \geq 0,$ существуют функции

$A_i^*(t) \in L^1(I, R_+),\ c_i(t),\ R_i^*(t) \in L^1(I, R_+)$ такие, что

$$A_i'(t) \le A_i^*(t)A_i(t),\ \left(E_i^{(k)}(t)\right)^2 \le B_i^{(k)}(t)c_i^{(k)}(t),\ R_{i\tau}''(t,\tau) \le R_i^*(t)R_{i\tau}'(t,\tau)$$

$(i = 1..n;\ k = 0,1)$;

4) $$W(t) + |f_0(t)| + (W(t))^{-1}[|H_2(t,t_0)| + |H_{2\tau}'(t,t_0)|] + (W(t))^{-1}[F_0(t) + g_0(t) + g_1(t)\int_{t_0}^{t} g_2(t,\tau)d\tau] +$$

$$+|b_1(t)| + |b_0(t)| + \int_{t_0}^{t}[|T_0(t,\tau)| + |K_0(t,\tau)|]d\tau \in L^1(I, R_+ \setminus \{0\}).$$

Тогда для любого решения $(x(t), y(t))$ системы (6) справедливы утверждения:

$$x^{(k)}(t) = O(1) \quad (k = 0,1), \quad y(t) = O(1), \quad b_2(t)(y(t))^2 \in L^1(I, R_+). \tag{8}$$

Пусть, кроме того, 5) $W(t) = O(1)$. Тогда для любого решения $x(t)$ ИДУ (1) верны: $x^{(k)}(t) = O(1) \quad (k = 0,1,2)$, т. е. любое решение ИДУ (1) устойчиво.

Следует отметить, что на основании условий 1)–3) вытекает, что $u(t) \ge 0$ и для $u(t)$ от тождества (7) получается следующее интегральное неравенство:

$$u(t) \le u(t_0) + 2\int_{t_0}^{t}\{W(s)|\lambda| + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[A_i^*(s) + R_i^*(s)]\}u(s)ds + 2\int_{t_0}^{t}(u(s))^{\frac{1}{2}}\{|f_0(s)| +$$

$$+(W(s))^{-1}\left[|H_2(s,t_0)||x'(t_0)| + |H_{2\tau}'(s,t_0)||x(t_0)|\right] + (W(s))^{-1}[F_0(s) + |\lambda| g_0(s)(u(s))^{\frac{1}{2}} +$$

$$+g_1(s)\int_{t_0}^{s} g_2(s,\tau)|\lambda|(u(\tau))^{\frac{1}{2}}d\tau] + |b_1(s)|(u(s))^{\frac{1}{2}} + |\lambda||b_0(s)|(u(s))^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\int_{t_0}^{s}[|\lambda||T_0(s,\tau)| + |K_0(s,\tau)|](u(\tau))^{\frac{1}{2}}d\tau\}ds,$$

к которому применяется лемма 1 [7]. В силу условий 3), 4) будем иметь, что $u(t) = O(1)$, из этого получаем утверждения (8). Наконец, из замены (5) с учетом условия 5) и $y(t) = O(1)$ вытекает, что $x''(t) = O(1)$ для любого решения $x(t)$ ИДУ (1), что и завершает доказательство теоремы.

Пример. Для ИДУ (1) с $a_2(t) \equiv 4 + 2e^t + (\sin t)^{\frac{1}{5}}$, $a_1(t) \equiv 4 + H_2(t,t) - \dfrac{19e^{-4t}}{t^3 + 51}$,

$$a_0(t) \equiv 16 + 8e^t + 4(\sin t)^{\frac{1}{5}} - H_{2\tau}'(t,\tau) + \frac{e^{-4t}\cos 9t}{(t+3)^4},$$

$$Q_0(t,\tau) \equiv H_{2\tau\tau}''(t,\tau) + 4H_2(t,\tau) - \frac{43e^{-4t}\cos(t\tau)}{t^3 + \tau^3 + 10},$$

$$f(t) \equiv -\frac{e^{t^4}\sin^3 7t}{t+16} - \frac{68e^{-4t}}{t^2+21},\ F(t,x,z) \equiv e^{-4t}\left(\frac{\sin 7t}{t}\right)^2 \cos(xz) - \frac{e^{-4t}x\cos 3z}{(t+9)^2} - e^{-4t}z\sin z,$$

$$h(t,\tau,x) \equiv \frac{x\sin(x+\tau)}{e^t+2\tau+3},\ \ t_0 = 0$$

выполняются все условия теоремы при

$$H_2(t,\tau) \equiv e^{-4t+4\tau}\left[\exp\left(\frac{t+\tau+1}{t+\tau+2}\right) + \frac{1}{t-\tau+15}\right] e^{t^4+\tau^4}\sin^3 7t \sin^3 7\tau - \frac{23e^{-4t+4\tau}\cos 10\tau}{(t+\tau+17)^3},$$

$$\lambda = 2,\ W(t) \equiv e^{-4t},$$

здесь

$$b_2(t) \equiv 2e^t + (\sin t)^{\frac{1}{5}},\ b_1(t) \equiv -\frac{19}{t^3+51},\ \ b_0(t) \equiv \frac{\cos 9t}{(t+3)^4},\ T_0(t,\tau) \equiv -\frac{43\cos(t\tau)}{t^3+\tau^3+10},$$

$$K(t,\tau) \equiv \left[\exp\left(\frac{t+\tau+1}{t+\tau+2}\right) + \frac{1}{t-\tau+15}\right] e^{t^4+\tau^4}\sin^3 7t \sin^3 7\tau - \frac{23\cos 10\tau}{(t+\tau+17)^3},\ n = 1,$$

$$\psi_1(t) \equiv e^{t^4}\sin^3 7t,\ R_1(t,\tau) \equiv \exp\left(\frac{t+\tau+1}{t+\tau+2}\right) + \frac{1}{t-\tau+15},$$

$$A_1(t) \equiv \exp\left(\frac{t+1}{t+2}\right),\ \ A_1^*(t) \equiv \frac{1}{(t+2)^2},\ B_1(t) \equiv \frac{1}{t+15},\ R_1^*(t) \equiv \frac{1}{(t+2)^2},$$

$$E_1(t) \equiv -\frac{1}{t+16},\ c_1(t) \equiv \frac{1}{t+15},\ K_0(t,\tau) \equiv -\frac{23\cos 10\tau}{(t+\tau+17)^3},\ \ f_0(t) \equiv -\frac{68}{t^2+21},$$

$$F_0(t) \equiv \left(\frac{\sin 7t}{t}\right)^2 e^{-4t},\ g_0(t) \equiv \frac{e^{-4t}}{(t+9)^2},\ g_1(t) \equiv e^{-4t},\ \ g_2(t,\tau) \equiv \frac{1}{e^t+2\tau+3}.$$

Значит, любое решение этого ИДУ устойчиво.

Отметим, что нам удалось найти новый класс слабо нелинейных ИДУ третьего порядка типа Вольтерра, для которого решаема сформулированная выше задача. Результаты решения такой задачи могут быть использованы для исследования устойчивости колебаний вязко-упругих тел [8]. Также, заметим, что мы развили метод вспомогательных ядер, вводя в ИДУ (1) некоторое ядро $H_2(t,\tau)$ с $x''(\tau)$, и проделав дважды интегрирование по частям в интеграле (от t_0 до t) с $-H_2(t,\tau)x''(\tau)d\tau$. Такое развитие метода вспомогательных ядер можно применить для получения условий устойчивости решений ИДУ типа Вольтерра порядка ≥ 4 с аналогичным интегральным возмущением, как в ИДУ(1).

Литература

1. *Искандаров С.* Об асимптотической устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка с неполными ядрами / С. Искандаров, Н.А. Абдирайимова // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. Новосибирск. 2020. № 2-1 (41). С. 179–184.
2. *Искандаров С.* Об асимптотической устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка с неполными ядрами / С. Искандаров, Н.А. Абдирайимова // Вестник КРСУ. 2020. Т. 20. № 12. С. 23–29.
3. *Искандаров С.* Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра / С. Искандаров. Бишкек: Илим, 2002. 216 с.
4. *Искандаров С.* Об одном нестандартном методе сведения к системе для линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка / С. Искандаров // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Бишкек: Илим, 2006. Вып. 35. С. 36–40.
5. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование / В. Вольтерра; пер. с фр. М.: Наука, 1976. 288 с.
6. *Искандаров С.* Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений уравнений типа Вольтерра: автореф. дисс…. д-ра физ.-мат. наук / С. Искандаров. Бишкек, 2003. 34 с.
7. *Ведь Ю.А.* Достаточные признаки ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений / Ю.А. Ведь, З. Пахыров // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. Фрунзе: Илим, 1973. Вып. 9. С. 68–103.
8. *Alahmadi F.* Boundedness and stability of solutions of nonlinear Volterra integro-differential equations / F. Alahmadi, Y. Raffoul, S. Alharbi // Adv. Dyn. Syst. Appl. 2018. Vol. 13(1). Pp.19–31.