УДК 517.968.72

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ВЛИЯНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

С. Искандаров, Е.А. Комарцова

Устанавливаются достаточные условия ограниченности на полуоси и стремления к нулю при неограниченном росте аргумента всех решений линейного однородного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка типа Вольтерра в случае, когда соответствующее ему линейное однородное дифференциальное уравнение третьего порядка может иметь неограниченные и не стремящиеся к нулю решения на полуоси. Приводится иллюстративный пример.

Ключевые слова: линейное однородное вольтеррова интегро-дифференциальное уравнение третьего порядка; влияние интегральных возмущений типа Вольтерра; ограниченность решений; стремление к нулю решений.

СЫЗЫКТУУ БИР ТЕКТҮҮ ҮЧҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫНЫН ТРАЕКТОРИЯСЫНА ИНТЕГРАЛДЫК МҮЧӨЛӨРДҮН ТААСИРИН ИЗИЛДӨӨ ЖӨНҮНДӨ

С. Искандаров, Е.А. Комарцова

Бул макалада тиешелүү бир тектүү сызыктуу үчүнчү тартиптеги дифференциалдык теңдеменин чыгарылыштары жарым окто чектелбеген жана нөлгө умтулбаган учурда сызыктуу бир тектүү үчүнчү тартиптеги Вольтерра тибиндеги интегралдык-дифференциалдык теңдеменин бардык чыгарылыштарынын жарым окто чектелгендигинин жана аргументтердин чексиз өсүшүндө нөлгө умтулуусунун жетиштүү шарттары белгиленет. Алынган жыйынтыктарды тастыктай турган мисал келтирилет.

Түйүндүү сөздөр: Вольтерра тибиндеги үчүнчү тартиптеги бир тектүү интегралдык-дифференциалдык теңдеме; Вольтерра тибиндеги интегралдык мүчөнүн таасири; чыгарылыштардын чектелгендиги; чыгарылыштардын нөлгө умтулуусу.

ABOUT INVESTIGATION OF INTEGRAL PERTURBATIONS INFLUENCE ON THE BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF THE THIRD ORDER LINEAR HOMOGENEOUS DIFFERENTIAL EQUATION

S. Iskandarov, E.A. Komartsova

Sufficient conditions for boundedness on the semiaxis and tending to zero for unbounded growth of the argument of all solutions of Volterra type third order linear homogeneous integro-differential equation are established in the case, when the corresponding linear homogeneous differential equation of the third order can have unbounded and non-tending to zero solutions on the semiaxis. An illustrative example is given.

Keywords: linear homogeneous integro-differential equation of the third order Volterra type; the influence of Volterra type integral perturbations; boundedness of solutions; tending to zero of solutions.

Все фигурирующие функции и их производные являются непрерывными и соотношения имеют место при $t \ge t_0$, $t \ge \tau \ge t_0$; $J = [t_0, \infty)$; ИДУ – интегро-дифференциальное уравнение; ДУ – дифференциальное уравнение.

ЗАДАЧА. Установить достаточные условия ограниченности на J и стремления к нулю при $t \to \infty$ всех решений ИДУ третьего порядка типа Вольтерра вида:

$$x'''(t) + \sum_{k=0}^{2} \left[a_k(t) x^{(k)}(t) + \int_{t_0}^{t} Q_k(t,\tau) x^{(k)}(\tau) d\tau \right] = 0, \quad t \ge t_0 \tag{1}$$

в случае, когда соответствующее линейное однородное ДУ третьего порядка

$$x'''(t) + \sum_{k=0}^{2} a_k(t) x^{(k)}(t) = 0, \quad t \ge t_0 \tag{2}$$

может иметь решения, не обладающие изучаемыми свойствами.

Отметим, что такая задача ранее была изучена в докладе С. Искандарова [1]. Главное отличие настоящей работы от [1] состоит в сведении ИДУ (1) к системе, состоящей из 2-х линейных неоднородных ДУ первого порядка и одного линейного ИДУ первого порядка типа Вольтерра, при этом применяется схема нестандартного метода сведения к системе [2]. В [1] ИДУ (1) было сведено к системе из одного линейного неоднородного ДУ первого порядка и одного линейного ИДУ второго порядка типа Вольтерра, с использованием нестандартного метода сведения к системе [3]. На примерах можно убедиться, что результаты настоящей работы и [1] могут не пересекаться.

В настоящей работе, наряду с нестандартным методом сведения к системе [2], будут развиваться: метод преобразования уравнений [5, с. 25–27]; метод срезывающих функций С. Искандарова [5, с. 41]; метод интегральных неравенств Ю.А. Ведь, З. Пахырова [6]; метод интегральных неравенств первого рода одного из авторов [5, с. 110–111], а также используется формула Коши интегрального представления решения линейного неоднородного ДУ первого порядка, правило Лопиталя в форме Штольца [4, с. 115].

Приведем кратко схему решения задачи, которая сформулирована выше.

I этап. В ИДУ (1) сделаем следующие нестандартные замены [2]:

$$x'(t) + \lambda_1 x(t) = W_1(t) y(t), \tag{3}$$

$$y'(t) + \lambda_2 y(t) = W_2(t) u(t), \tag{4}$$

где λ_1, λ_2 – некоторые вспомогательные параметры; $0 < W_1(t), W_2(t)$ – некоторые весовые функции; $y(t), u(t)$ – новые неизвестные функции. Тогда ИДУ (1) сводится к следующей эквивалентной системе:

$$\begin{cases} x'(t) + \lambda_1 x(t) = W_1(t) y(t), \\ y'(t) + \lambda_2 y(t) = W_2(t) u(t), \\ u'(t) + b_2(t) u(t) + b_1(t) y(t) + b_0(t) x(t) + \\ + \int_{t_0}^{t} [P_0(t,\tau) x(\tau) + P_1(t,\tau) y(\tau) + K(t,\tau) u(\tau)] d\tau = 0, t \ge t_0, \end{cases} \tag{5}$$

где

$$b_2(t) \equiv a_2(t) + W(t)\left(W_1(t)\right)^{-1} + \left(W_1(t)W_2(t)\right)'\left(W_1(t)W_2(t)\right)^{-1};$$

$$W(t) \equiv W_1'(t) - \left(\lambda_1 + \lambda_2\right)W_1(t);$$

$$b_1(t) \equiv a_1(t)\left(W_2(t)\right)^{-1} + a_2(t)W(t)\left(W_1(t)W_2(t)\right)^{-1} + \lambda_1^2\left(W_2(t)\right)^{-1} +$$

$$+\left[W'(t) - \lambda_2 W(t)\right]\left(W_1(t)W_2(t)\right)^{-1};$$

$$b_0(t) \equiv \left[a_0(t) - \lambda_1 a_1(t) + \lambda_1^2 a_2(t) - \lambda_1^3\right]\left(W_1(t)W_2(t)\right)^{-1};$$

$$P_0(t,\tau) \equiv \left(W_1(t)W_2(t)\right)^{-1}\left[Q_0(t,\tau) - \lambda_1 Q_1(t,\tau) + \lambda_1^2 Q_2(t,\tau)\right];$$

$$P_1(t,\tau) \equiv \left(W_1(t)W_2(t)\right)^{-1}\left[Q_1(t,\tau)W_1(\tau) + Q_2(t,\tau)W(\tau)\right];$$

$$K(t,\tau) \equiv \left(W_1(t)W_2(t)\right)^{-1} Q_2(t,\tau)W_1(\tau)W_2(\tau).$$

II этап. Получение энергетической оценки решений системы (5).

Пусть [5]:

$$K(t,\tau) = \sum_{i=0}^{n} K_i(t,\tau), \tag{К}$$

$\psi_i(t)$ $(i = 1..n)$ – некоторые срезывающие функции;

$$R_i(t,\tau) \equiv K_i(t,\tau)\left(\psi_i(t)\psi_i(\tau)\right)^{-1} \ (i = 1..n).$$

Для любого решения $\left(x(t), y(t), u(t)\right)$ системы (5), ее первое уравнение умножаем на $x(t)$, второе – на $y(t)$, третье – на $u(t)$, сложим полученные соотношения, затем интегрируем в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, при этом вводим условие (К), функции: $\psi_i(t), R_i(t,\tau)$ $(i = 1..n)$ [5], применяем лемму 1.4 [7]. В результате получаем тождество:

$$V(t) \equiv \left(x(t)\right)^2 + 2\lambda_1\int_{t_0}^{t}\left(x(s)\right)^2 ds + \left(y(t)\right)^2 + \lambda_2\int_{t_0}^{t}\left(y(s)\right)^2 ds + \left(u(t)\right)^2 +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}[R_i(t,t_0)\left(U_i(t,t_0)\right)^2 + \int_{t_0}^{t} R'_{i\tau}(t,\tau)\left(U_i(t,\tau)\right)^2 d\tau] \equiv V(t_0) +$$

$$+2\int_{t_0}^{t}\{W_1(s)x(s)y(s) + W_2(s)y(s)u(s) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[R'_{is}(s,t_0)\left(U_i(s,t_0)\right)^2 +$$

$$+\int_{t_0}^{s} R''_{is\tau}(s,\tau)\left(U_i(s,\tau)\right)^2 d\tau] - u(s)\left[b_2(s)u(s)+b_1(s)y(s)+b_0(s)x(s)+\right.$$

$$\left.+\int_{t_0}^{s}\left(P_0(s,\tau)x(\tau)+P_1(s,\tau)y(\tau)+K_0(s,\tau)u(\tau)\right)d\tau\right]\Big\}ds, \qquad (6)$$

где $U_i(t,\tau) \equiv \int_{\tau}^{t}\psi_i(\eta)u(\eta)d\eta \ \ (i=1..n)$.

Переходом от тождества (6) к интегральному неравенству и применением леммы 1 [6], доказывается

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняются условия: 1) $\lambda_k > 0$, $W_k(t) > 0 \ \ (k=1,2)$, (K); 2) $R_i(t,t_0) \ge 0$, $R'_{i\tau}(t,\tau) \ge 0$, существуют функции $R_i^*(t) \ge 0$, $R_i^{**}(t) \ge 0$ такие, что $R'_{it}(t,t_0) \le R_i^*(t)R_i(t,t_0)$, $R''_{it\tau}(t,\tau) \le R_i^{**}(t)R'_{i\tau}(t,\tau) \ \ (i=1..n)$;

3) $W_{k+1}(t)+\left|b_k(t)\right|+\left|b_2(t)\right|+\int_{t_0}^{t}\left[\left|P_k(t,\tau)\right|+\left|K_0(t,\tau)\right|\right]d\tau \in L^1\left(J, R_+ \setminus \{0\}\right) \quad \left(k=0,1\right)$.

Тогда для любого решения $\left(x(t), y(t), u(t)\right)$ системы (5) справедливо следующее энергетическое неравенство:

$$V(t) \le V(t_0)M(t), \ t \ge t_0, \qquad (7)$$

где

$$M(t) \equiv \exp\left(2\int_{t_0}^{t}\left\{W_1(s)+W_2(s)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[R_i^*(s)+R_i^{**}(s)\right]+\left|b_0(s)\right|+\left|b_1(s)\right|+\left|b_2(s)\right|+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_{t_0}^{s}\left[\left|P_0(s,\tau)\right|+\left|P_1(s,\tau)\right|+\left|K_0(s,\tau)\right|\right]d\tau\right\}ds\right).$$

III этап. Применение леммы об интегральном неравенстве первого рода С. Искандарова. Пусть для некоторого $j \in \{1,...,n\}$, т. е. $1 \le j \le n$, функция $R_j(t,t_0) > 0$. Тогда из неравенства (7) следует: $R_j(t,t_0)\left(U_j(t,t_0)\right)^2 \le V(t_0)M(t) \Rightarrow \left|U_j(t,t_0)\right| \le \sqrt{V(t_0)}\left(M(t)\right)^{\frac{1}{2}}\left(R_j(t,t_0)\right)^{-\frac{1}{2}} \equiv q(t) \Rightarrow$

$$\left|\int_{t_0}^{t}\psi_j(\eta)u(\eta)d\eta\right| \le q(t). \qquad (8)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть 1) выполняются все условия теоремы 1; 2) для некоторого $j \in \{1,...,n\}$: $R_j(t,t_0) > 0$, $q(t) \ge 0$, $q'(t) \ge 0$, $\psi_j(t) > 0$, $\psi'_j(t) \ge 0$, $q(t)\left(\psi_j(t)\right)^{-1} \in L^1(J,R_+)$. Тогда

$$\int_{t_0}^{t} u(\eta)d\eta = O(1) . \tag{9}$$

Пусть, кроме того, 3) $W_1(t) = O(1)$, $W_2^{(k)}(t) \to 0$ $(k = 0,1)$ при $t \to \infty$. Тогда

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} x(t) = 0. \tag{10}$$

Для доказательства теоремы 2 поступаем так. Сначала к интегральному неравенству первого рода (8) применим лемму 3.3 [5, с. 111]. Тогда будем иметь [в силу условия 2) теоремы 2]:

$$\int_{t_0}^{t} u(\eta)d\eta = O(1) ,$$

т. е. (9). Теперь для любых $y(t_0)$, $x(t_0)$ из (4), (3) соответственно, сможем написать формулы Коши:

$$y(t) = e^{-\lambda_2(t-t_0)}\left[y(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_2(s-t_0)} W_2(s)u(s)ds \right], \tag{11}$$

$$x(t) = e^{-\lambda_1(t-t_0)}\left[x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_1(s-t_0)} W_1(s)y(s)ds \right]. \tag{12}$$

Из (11) интегрированием по частям имеем [8]:

$$y(t) = e^{-\lambda_2(t-t_0)}\left\{ y(t_0) + e^{\lambda_2(t-t_0)} W_2(t)\int_{t_0}^{t} u(\eta)d\eta - \right.$$

$$\left. -\int_{t_0}^{t} e^{\lambda_2(s-t_0)}\left[\lambda_2 W_2(s) + W_2'(s)\right]\left(\int_{t_0}^{s} u(\eta)d\eta\right)ds \right\}. \tag{13}$$

Отсюда, с учетом условий $W_2^{(k)}(t) \to 0$ $(k = 0,1)$ при $t \to \infty$, получаем, что $y(t) \to 0$ при $t \to \infty$, при этом к (13) применяется правило Лопиталя в форме Штольца [4, с. 115]. Остается к (12) применить также правило Лопиталя в форме Штольца [4, с. 115]. Теорема 2 доказана, т. к. $x(t)$ – любое решение ИДУ (1).

СЛЕДСТВИЕ. Если все условия теорем 1, 2 выполняются при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ (вместо условий $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$), то любое решение $x(t)$ ИДУ (1) ограничено на J .

Приведем простейший пример.

ПРИМЕР. Для ИДУ третьего порядка:

$$x'''(t)+(t+1)x''(t)-(2t+5)x'(t)+(t+3)x(t)+$$
$$+\int_0^t\left\{\left[Q_1(t,\tau)-Q_2(t,\tau)+\frac{1}{(t+1)(t+\tau+4)}\right]x(\tau)+\right.$$
$$\left.+\left[2Q_2(t,\tau)(\tau+1)-\frac{\sqrt{t+\tau+5}}{t+1}\right]x'(\tau)+Q_2(t,\tau)x''(\tau)\right\}d\tau=0,\ t\geq 0,$$

где $Q_2(t,\tau)\equiv\frac{t+1}{\tau+1}\left[\left(\frac{t+\tau+1}{t+\tau+2}\right)\exp\left(e^t+e^\tau\right)+\frac{(\sin t+\cos\tau)^{1/3}}{t+\tau+5}\right]$, выполняются все условия теорем 1, 2 при $\lambda_1=\lambda_2=1$, $W_1(t)\equiv 1$, $W_2(t)\equiv\frac{1}{t+1}$, здесь $t_0=0$, $b_2(t)\equiv-\left(t+1+\frac{1}{t+1}\right)$, $b_1(t)\equiv-4(t+1)^2$,

$b_0(t)\equiv 4(t^2+3t+2)$, $P_0(t,\tau)\equiv\frac{1}{t+\tau+4}$, $P_1(t,\tau)\equiv(t+\tau+5)^{\frac{1}{2}}$,

$K(t,\tau)\equiv\left(\frac{t+\tau+1}{t+\tau+2}\right)\exp(e^t+e^\tau)+\frac{(\sin t+\cos\tau)^{1/3}}{t+\tau+5}$, $n=1$, $\psi_1(t)\equiv\exp e^t$, $R_1(t,\tau)\equiv\frac{t+\tau+1}{t+\tau+2}$,

$R_1^*(t)\equiv\frac{1}{(t+1)(t+2)}$, $R_1^{**}(t)\equiv 0$, $K_0(t,\tau)\equiv(t+\tau+5)^{-1}(\sin t+\cos\tau)^{1/3}$.

Однако соответствующее ДУ:

$$x'''(t)+(t+1)x''(t)-(2t+5)x'(t)+(t+3)x(t)=0,\ t\geq 0,$$

имеет неограниченные на $R_+=[0,\infty)$ частные решения $x_1(t)=e^t$, $x_2(t)=te^t$.

Литература

1. *Искандаров С.* О влиянии интегральных возмущений на ограниченность решений линейного дифференциального уравнения третьего порядка на полуоси / С. Искандаров // The abst. book of the International scientific conf. «Weighted estimates of differential and integral operators and their applications», 04–06.05.2017. Astana, L.N. Gumilev ENU. Astana: L.N. Gumilev ENU, 2017. Pp. 178–181.
2. *Iskandarov S.* Method of a nonstandard reduction to a system and exponential stability of a third-order linear ordinary differential equation / S. Iskandarov // Different. equations. 2010. Vol. 46. No. 6. Pp. 907–908.
3. *Искандаров С.* О методе сведения к системе для линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения второго порядка / С. Искандаров // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Бишкек: Илим, 2006. Вып. 35. С. 31–35.
4. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. М.: Наука, 1967. 472 с.
5. *Искандаров С.* Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра / С. Искандаров. Бишкек: Илим, 2002. 216 с.

6. *Ведь Ю.А.* Достаточные признаки ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений / Ю.А. Ведь, З. Пахыров // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. Фрунзе: Илим, 1973. Вып. 9. С. 68–103.
7. *Искандаров С.* Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений уравнений типа Вольтерра: автореф. дис… д-ра физ.-мат. наук / С. Искандаров. Бишкек, 2003. 34 с.
8. *Комарцова Е.А.* Достаточные условия устойчивости решений линейного волтеррова интегро-дифференциального уравнения пятого порядка на полуоси / Е.А. Комарцова // Вестник КРСУ. 2018. Т. 18. № 12. С. 8–14.