УДК 517.9

НАГРУЖЕННЫЕ ДВУХСКОРОСТНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА ТИПА КАЦА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Ж.Ж. Саркелова

Теория обратных задач для уравнения переноса частиц является одной из быстро развивающихся областей современной математики. Обратные задачи элементарных частиц для сингулярно-возмущенных уравнений в области теории переноса сравнительно мало изучены. Поэтому, теория таких обратных задач еще далека от полного завершения, в чем и заключается актуальность данной работы. Изложены результаты, относящиеся к теории сингулярно-возмущенных обратных задач типа Каца в неограниченной области. Устанавливается однозначная разрешимость и единственность решения сингулярно-возмущенной обратной задачи, а также определяется близость решений сингулярно-возмущенной обратной задачи и вырожденной обратной задачи. Результаты работы дополняют теорию прямых и обратных задач переноса.

Ключевые слова: нагруженная задача; задача переноса; элементарные частицы; априорная информация.

ЧЕКСИЗ АЙМАКТАГЫ КАЦ ТИБИНДЕГИ ЖЫЛЫШУУ ТЕҢДЕМЕСИ ҮЧҮН ЖҮКТӨМДҮҮ ЭКИ ЫЛДАМДЫКТАГЫ ТЕСКЕРИ МАСЕЛЕ

Ж.Ж. Саркелова

Бөлүкчөлөрдүн таралуусунун теңдемеси үчүн тескери масеелердин теориясы, заманбап математиканын тез өнүгүп келе жаткан багыттарынын бири. Сингулярдык козголгон теңдемелер үчүн тескери маселелер жылышуу теориясы жаатында, айрыкча, элементардык бөлүкчөлөрдүн тескери маселелеринде чыгаруу аз изилденген. Демек, мындай тескери маселелердин теориясы дале болсо толук чечиле элек, бул иштин актуалдуулугу болуп эсептелет. Ушуга байланыштуу, сунуш кылынган макалада Кац тибиндеги сингулярдуу козголгон тескери маселелердин теориясына байланыштуу чексиз чөйрөдө натыйжалар келтирилген. Сингулярдык козголгон тескери маселени чыгаруу шарты жана анын чыгарылышынын бир гана жообу бар экендиги далилденген жана сингулярдык козголгон жана обочолонгон маселелердин чыгарылышынын жакындыгы каралып далилделген. Бул иштин натыйжалары түз жана тескери жылышуу маселелеринин теориясын толуктайт.

Түйүндүү сөздөр: жүктөлгөн маселе; жылышуу маселеси; элементардык бөлүкчөлөр; априори маалыматы.

LOADED TWO-VELOCITY INVERSE PROBLEMS FOR KATS TYPE TRANSFER EQUATIONS IN AN UNBOUNDED DOMAIN

Zh.Zh. Sarkelova

The theory of inverse problems for the particle transport equation is one of the rapidly developing areas of modern mathematics. Inverse problems for singularly perturbed equations have been little studied in the field of transport theory, especially this applies to inverse problems of elementary particles. Therefore, the theory of such inverse problems is still far from complete, which is the relevance of this work. In this regard, the proposed article presents results related to the theory of singularly perturbed inverse problems of Kats type in an unbounded domain. The unique solvability and uniqueness of the solution of the singularly perturbed inverse problem is established, and the proximity of the solutions of the singularly perturbed inverse problem and the degenerate inverse problem is determined. The results of this work supplement the theory of direct and inverse transport problems.

Keywords: loaded problem; transfer problem; elementary particles; a priori information.

Введение. Обратные задачи для сингулярно-возмущенных уравнений [1–4] мало изучены в области теории переноса, особенно это относится к обратным задачам элементарных частиц. В связи с этим, в данной работе изучается нагруженная двухскоростная сингулярно-возмущенная обратная задача (СВОЗ) переноса в форме Каца в области элементарных частиц [5–8], где требуется восстановление коэффициента в правой части, зависимое от простых координат. При этом близость решений СВОЗ и вырожденных обратных задач (ОЗ) оценивается в $L_h^p(\Omega_0=(0,T)\times R^2; p>1)$, где L_h^p – это пространство суммируемых классов функций в области Ω_0 со степенью p, с весом $h\geq 0$. Причем, для решения СВОЗ учитывается алгоритм, обобщающий метод погранслойной функции [1, 2], когда априорная информация задается из $L^p(R^2)$.

С этой целью рассмотрим ОЗ:

$$\varepsilon^{\beta}\frac{\partial}{\partial t}\left(E^{1,1,1}_{(a_1,a_2)}U_{\varepsilon}\right)+\lambda E^{1,1,1}_{(a_1,a_2)}U_{\varepsilon}+h_*(x,y)U_{\varepsilon}=\varepsilon U_{\varepsilon}U_{\varepsilon x}(x_0,y,t)+Z_{\varepsilon}(x,y)f(t), \tag{1}$$

$$\begin{cases} U_{\varepsilon}(t,x,y)\,|_{t=0}=V(0,x,y)+\exp\left(-\dfrac{x^2+y^2}{\varepsilon}\right),\ \ (i=0: V^{(0)}(t,x,y)=V(t,x,y); \\ i=1: V_t^{(1)}(t,x,y)=\dfrac{\partial}{\partial t}V(t,x,y)) \\ U_{\varepsilon t}(t,x,y)\,|_{t=0}=V_t(0,x,y)+(2a_1x\varepsilon^{-1}+2a_2y\varepsilon^{-1})\exp\left(-\dfrac{x^2+y^2}{\varepsilon}\right),\ \ \forall(x,y)\in R, \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} (E^{1,1,1}_{(a_1,a_2)}U_{\varepsilon})\,|_{t=T}=g_0(x,y)+g_{\varepsilon}(x,y), \\ (E^{1,1,1}_{(a_1,a_2)}V)\,|_{t=T}=g_0(x,y), \forall(x,y)\in R^2, \end{cases} \tag{3}$$

при этом вводится информация относительно исходных данных в виде:

$$\begin{cases} \|U_{\varepsilon}(0,x,y)-V(0,x,y)\|_{L^p(R^2)}\leq\left(\displaystyle\int_{R^2}\exp\left(-p\frac{x^2+y^2}{\varepsilon}\right)dxdy\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\dfrac{\pi}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\varepsilon^{\frac{1}{p}}=\gamma_0\varepsilon^{\frac{1}{p}},| \\ \sup\limits_{\bar{\Omega}_0}(\displaystyle\int_0^t\left|g^{(i)}_{\varepsilon x}(x-a_1(t-s),y-a_2(t-s))\right|^p ds)^{\frac{1}{p}}\leq\Delta_{01}(\varepsilon),(i=0,1), \\ \left\|g^{(i)}_{\varepsilon x}(x,y)\right\|_{L^p(R^2)}\leq\Delta_{02}(\varepsilon),(\Delta_{01}(\varepsilon),\Delta_{02}(\varepsilon)\leq\Delta_0(\varepsilon),i=0,1), \\ \mathrm{E}^{1,1,1}_{(a_1,a_2)}=\dfrac{\partial}{\partial t}+a_1\dfrac{\partial}{\partial x}+a_2\dfrac{\partial}{\partial y}, \end{cases} \tag{4}$$

где $(U_{\varepsilon},Z_{\varepsilon})$ – являются неизвестными функциями. Известными функциями являются: $0<h_*(x,y),\ f(t),\ \varphi_i(x,y),\ g_0(x,y),\ g_{\varepsilon}(x,y),\ 0<a_i,\ \lambda=const,\ (i=0,1),\ 0<\beta<\frac{1}{2}$, допускающие ограничения:

$$\begin{cases} h_* \equiv h_1(x) + h_2(y) + h(x,y), \\ (0 \le h \le h_0 = const: \left(\iint\limits_{R^2} h(x,y)dxdy \right)^{\frac{1}{p}} \le \tilde{h}_0 = const, \\ \sup\limits_{[0,T]} | f^{(i)}(t) | \le f_0 = const, (i = 0,1);\ f(0) = 0,\ f(T) \ne 0, \\ f(T) - \int\limits_0^T \exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(T-s) \right) f'(s)ds = M_0(T,\lambda,\varepsilon^\beta) \ne 0, \\ \forall \varepsilon \in (0,1), (\varepsilon = 0);\ 0 < \frac{1}{\lambda} = const << 1. \end{cases} \tag{5}$$

Материалы и методы исследования. Из ОЗ (1)–(3) при $\varepsilon = 0$ следует вырожденная задача:

$$E^{1,1,1}_{(a_1,a_2)}V + \frac{1}{\lambda}h_*(x,y)V = \frac{1}{\lambda}\tilde{Z}(x,y)f(t), \tag{6}$$

$$\left(E^{1,1,1}_{(a_1,a_2)}V \right)|_{t=0} = \varphi_0(x,y),\ \forall (x,y) \in R^2, \tag{7}$$

$$\left(E^{1,1,1}_{(a_1,a_2)}V \right)|_{t=T} = g_0(x,y), \tag{8}$$

причем $\left(V, \tilde{Z} \right)$ – неизвестные функции.

В условиях (5), (7), (8) из уравнения (6) следует:

$$\begin{cases} E^{1,1,1}_{(a_1,a_2)}V(t,x) + \frac{1}{\lambda}h_*(x,y)V(t,x,y) = (f(T))^{-1} f(t)\left[g_0(x,y) + \frac{1}{\lambda}h_* V(t,x,y) \right] = \\ = \left(B_0 V \right)(t,x,y), \\ \tilde{Z}(x,y) = (f(T))^{-1}\left[\lambda g_0(x,y) + h_* V(t,x,y) \right]. \end{cases} \tag{9}$$

Тогда первое уравнение системы (9) преобразуется к виду:

$$\begin{gathered} V = \varphi_0(x - a_1 t, y - a_2 t)\exp\left[-\left(\frac{1}{\lambda a_1}\int\limits_{x-a_1 t}^{x} h_1(\tau_1)d\tau_1 + \frac{1}{\lambda a_2}\int\limits_{y-a_2 t}^{y} h_2(\tau_2)d\tau_2 \right) \right] + \\ + \int\limits_0^t \left(\exp\left[-\left(\frac{1}{\lambda a_1}\int\limits_{x-a_1(t-s)}^{x} h_1(\tau_1)d\tau_1 + \frac{1}{\lambda a_2}\int\limits_{y-a_2(t-s)}^{y} h_2(\tau_2)d\tau_2 \right) \right] \right) \left\{ -\frac{1}{\lambda}h(x - a_1(t-s), y - \right. \\ \left. -a_2(t-s))V(s, x - a_1(t-s), y - a_2(t-s)) + (B_0 V)(s, x - a_1(t-s), y - a_2(t-s)) \right\} ds \equiv \\ \equiv (BV)(t,x,y), \end{gathered} \tag{10}$$

где (10) является нагруженным интегральным уравнением второго рода (ИУ-2). Если относительно оператора B допускаются условия принципа Банаха [9], это возможно, так как $0 < \dfrac{1}{\lambda} = const << 1,$ то уравнение (10) разрешимо в $C(\bar{\Omega}_0)$. А это означает, что функция $V \in C^{1,1,1}(\bar{\Omega}_0)$ является известной. Тогда, с учетом (9) и функция $\tilde{Z}(x,y)$ считается известной. Кроме того, $(V_t)_t, (V_x)_t, (V_y)_t \in L^p(0,T)$ для $\forall(x,y),$ т. е.:

$$\begin{cases} \| V_{t^2} \|_{L^p} = \left(\int\limits_0^T | V_{t^2}(t,x,y) |^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \le C_{01}, \\ \| V_{tx} \|_{L^p} = \left(\int\limits_0^T | V_{tx}(t,x,y) |^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \le C_{02}, \\ \| V_{ty} \|_{L^p} = \left(\int\limits_0^T | V_{ty}(t,x,y) |^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \le C_{03}, \forall(x,y) \in R^2, \\ C_0 = \max(C_{01}, C_{02}, C_{03}). \end{cases} \tag{11}$$

Лемма 1. При выполнении условий (5), (7), (8) вырожденное уравнение (6) разрешимо в $C^{1,1,1}(\bar{\Omega}_0)$, причем допускается условие (11).

Далее, для выяснения разрешимости СВОЗ предполагается:

$$\begin{cases} U_\varepsilon = V(t,x,y) + \xi_\varepsilon(t,x,y) + \exp\left(-\dfrac{(x-a_1t)^2 + (y-a_2t)^2}{\varepsilon} \right), \\ Z_\varepsilon = \tilde{Z}(x,y) + \eta_\varepsilon(x,y) \end{cases} \tag{12}$$

Из (1) с учетом (6), имеем:

$$\begin{cases} \varepsilon^p \dfrac{\partial}{\partial t}(E^{1,1,1}_{(a_1,a_2)}\xi) + \lambda(E^{1,1,1}_{(a_1,a_2)}\xi) + h_* \left(\exp(-\dfrac{(x-a_1t)^2 + (y-a_2t)^2}{\varepsilon}) + \xi_\varepsilon \right) = \\ = \eta_\varepsilon(x_0,y) f(t) - \varepsilon^\beta \left(V_{t^2} + a_1 V_{xt} + a_2 V_{yt} \right) + \varepsilon \left(V + \exp(-\dfrac{(x-a_1t)^2 + (y-a_2t)^2}{\varepsilon}) + \xi_\varepsilon \right) \times \\ \times \left(V_x(t,x_0,y) - \dfrac{2(x_0 - a_1t)}{\varepsilon} \exp(-\dfrac{(x_0-a_1t)^2 + (y-a_1t)^2}{\varepsilon}) + \xi_x(t,x_0,y) \right), \end{cases} \tag{13}$$

где $\left(V, \tilde{Z}\right)$ – решение вырожденной ОЗ (6)–(8); $\left(\xi_\varepsilon, \eta_\varepsilon\right)$ – остаточные функции, которые содержатся в уравнении (13) с условиями:

$$\xi_t^{(i)}(t,x,y)|_{t=0} = 0, \ \ (i = 0,1), \tag{14}$$

$$
\begin{cases}
\left(E^{1,1,1}_{(a_1,a_2)}\xi_\varepsilon\right)|_{t=T} = g_\varepsilon(x,y), \ \forall (x,y)\in R^2,\\
\left\|g_\varepsilon(x,y)\right\|_{L^p(R^2)} \le \Delta_0(\varepsilon).
\end{cases} \tag{15}
$$

Фактически остаточные функции $\left(\xi_\varepsilon,\eta_\varepsilon\right)$ определяются из ОЗ (13)–(15), поэтому, сначала (13) преобразуется к виду:

$$
\begin{cases}
E^{1,1,1}_{(a_1,a_2)}\xi_\varepsilon = \dfrac{1}{\varepsilon^\beta}\displaystyle\int_0^t \exp\left(-\dfrac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(t-s)\right)\Big\{-h_*(x,y)\xi_\varepsilon(s,x,y)+\eta_\varepsilon(x,y)f(s)+\\
+\varepsilon\left[V(s,x,y)+\exp\left(-\dfrac{(x-a_1s)^2+(y-a_2s)^2}{\varepsilon}\right)+\xi_\varepsilon(s,x,y)\right]\xi_x(s,x_0,y)+\varepsilon\xi_\varepsilon(s,x,y)\times\\
\times\left[V_x(s,x_0,y)-\dfrac{2(x_0-a_1s)}{\varepsilon}\exp\left(-\dfrac{(x_0-a_1s)^2+(y-a_2s)^2}{\varepsilon}\right)+\xi_x(s,x_0,y)\right]\Big\}ds+
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
+Y_1(t,x,y,\varepsilon)\equiv\left(H_0\xi_\varepsilon\right)(t,x,y)+Y_1+\dfrac{1}{\varepsilon^\beta}\displaystyle\int_0^t\exp\left(-\dfrac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(t-s)\right)\eta_\varepsilon(x,y)f(s)ds,\\
Y_1\equiv\displaystyle\int_0^t\exp\left(-\dfrac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(t-s)\right)\Big\{(-V_{s^2}(s,x,y)+a_1V_{xs}(s,x,y)+a_2V_{ys}(s,x,y))-\\
-\dfrac{1}{\varepsilon^p}h_*(x,y)\exp\left(-\dfrac{(x-a_1s)^2+(y-a_2s)^2}{\varepsilon}\right)+\varepsilon^{1-\beta}\Big[V(s,x,y)+\\
+\exp\left(-\dfrac{(x-a_1s)^2+(y-a_2s)^2}{\varepsilon}\right)\Big]\times\Big(V_x(s,x_0,y)-\dfrac{2(x_0-a_1s)}{\varepsilon}\times\\
\times\exp\left(-\dfrac{(x-a_1s)^2+(y-a_2s)^2}{\varepsilon}\right)\Big)\Big\}ds.
\end{cases} \tag{16}
$$

Откуда, на основе (15) следует уравнение:

$$\eta_\varepsilon(x,y) = -M_0^{-1}(H_0\xi_\varepsilon)(T,x,y) + Y_2(x,y,\varepsilon), \tag{17}$$

где

$$Y_2 = M_0^{-1}(T,\lambda,\varepsilon^\beta)\left\{g_\varepsilon(x,y) - Y_1(T,x,y,\varepsilon)\right\}.$$

Следовательно, подставляя (17) в (16), получим:

$$\begin{aligned} E^{1,1,1}_{(a_1,a_2)}\xi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^\beta}\int_0^t \exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(t-s)\right) f(s)ds\left\{-M_0^{-1}\left(H_0\xi_\varepsilon\right)(T,x,y) + Y_2(x,y,\varepsilon)\right\} + \\ +\left(H_0\xi_\varepsilon\right)(t,x,y) + Y_2(t,x,y,\varepsilon). \end{aligned} \tag{18}$$

Из уравнения (18), с учетом (14), и полученное интегральное уравнение дифференцируя по x, имеем систему:

$$\begin{cases} \xi_{\varepsilon x} = W_\varepsilon(t,x,y), \\ \xi_\varepsilon(t,x,y) = \int_0^t \left\{\frac{1}{\varepsilon^\beta}\int_0^s \exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(s-s')\left[-h_*(x-a_1(t-s), y-a_2(t-s))\times\right.\right.\right. \\ \times\xi_\varepsilon(s', x-a_1(t-s), y-a_2(t-s)) + \varepsilon\left(V\left(s', x-a_1(t-s), y-a_2(t-s)\right) + \right. \\ +\exp\left(-\frac{(x-a_1(t-s)-a_1s')^2 + (y-a_2(t-s)-a_2s')^2}{\varepsilon}\right) + \xi_\varepsilon(s', x- \\ -a_1(t-s), y-a_1(t-s))\Big)W_\varepsilon(s', x_0, y-a_2(t-s)) + \varepsilon\xi_\varepsilon(s', x- \\ -a_1(t-s), y-a_2(t-s))\left[V_x(s', x_0, y-a_2(t-s)) - \frac{2(x_0-a_1s')}{\varepsilon}\times\right. \\ \left.\left.\left.\times\exp\left(-\frac{(x_0-a_1s')^2 + (y-a_2(t-s)-a_2s')^2}{\varepsilon}\right) + W_\varepsilon(s', x_0, y-a_2(t-s))\right)\right]ds'\right\}ds - \\ -\int_0^t\left\{\frac{1}{\varepsilon^\beta}\int_0^s \exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(s-s')\right) f(s')ds' \times \mathrm{M}_0^{-1}\frac{1}{\varepsilon^\beta}\int_0^T \exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(T-s')\right)\times\right. \\ \times\left[-h_*(x-a_1(t-s), y-a_2(t-s))\xi_\varepsilon(s', x-a_1(t-s), y-a_2(t-s)) + \right. \\ +\varepsilon\left(V(s', x-a_1(t-s), y-a_2(t-s)) + \exp\left(-\frac{(x-a_1(t-s)-a_1s')^2 + (y-a_2(t-s)-a_2s')^2}{\varepsilon}\right) + \right. \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
+\xi_\varepsilon(s',x-a_1(t-s),y-a_2(t-s))\big)W_\varepsilon(s',x_0,y-a_2(t-s))+\\
+\varepsilon\xi_\varepsilon(s',x-a_1(t-s),y-a_2(t-s))\big(V_x(s',x_0,y-a_2(t-s))-2\dfrac{(x_0-a_1s')}{\varepsilon}\times\\
\times\exp\left(-\dfrac{(x_0-a_1s')^2+(y-a_2(t-s)-a_2s')^2}{\varepsilon}\right)+W_\varepsilon(s',x_0,y-a_2(t-s))\big)\big]ds'\Big\}ds+\\
+Y(t,x,y)\equiv\big(H_1[\xi_\varepsilon,W_\varepsilon]\big)(t,x,y),\\
W_\varepsilon(t,x,y)=\int\limits_0^t\left\{\dfrac{1}{\varepsilon^\beta}\int\limits_0^s\exp\left(-\dfrac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(s-s')\right)\big[-h_{*p}(x-a_1(t-s),y-a_2(t-s))\times\right.\\
\times\xi_\varepsilon(s',x-a_1(t-s),y-a_2(t-s))-h_*(x-a_1(t-s),y-a_2(t-s))W_\varepsilon(s',x-a_1(t-s),y-\\
-a_2(t-s))+\varepsilon(V_\rho(s',x-a_1(t-s),y-a_2(t-s))+\\
+\left(\exp\left(-\dfrac{(x-a_1(t-s)-a_1s')^2+y-a_2(t-s)-a_2s')^2}{\varepsilon}\right)\right)\times\\
\times\left(-\dfrac{2(x-a_1(t-s))}{\varepsilon}\right)+W_\varepsilon(s',x-a_1(t-s),y-a_2(t-s))\big)W_\varepsilon(s',x_0,y-a_2(t-s))+\\
+\varepsilon W_\varepsilon(s',x-a_1(t-s),y-a_2(t-s))\times(V_x(s',x_0,y-a_2(t-s))-\dfrac{2(x_0-a_1s')}{\varepsilon}\times\\
\times\exp\left(-\dfrac{(x_0-a_1s')^2+(y-a_2(t-s))^2}{\varepsilon}\right)+W_\varepsilon(s',x_0,y-a_2(t-s))\big)\big]ds'\Big\}ds-\\
-\int\limits_0^t\left\{\dfrac{1}{\varepsilon^\beta}\int\limits_0^s\exp\left(-\dfrac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(s-s')\right)f(s')ds'\times M_0^{-1}\dfrac{1}{\varepsilon^\beta}\int\limits_0^T\exp\left(-\dfrac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(T-s')\right)\times\right.
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\times\Big[-h_{*\rho}(x-a_1(t-s),y-a_2(t-s))\xi_\varepsilon(s',x-a_1(t-s),y-a_2(t-s))- \\
-h_*(x-a_1(t-s),y-a_2(t-s))\times W_\varepsilon(s',x-a_1(t-s),y-a_2(t-s))+\varepsilon\Big(V_\rho(s',x-a_1(t- \\
-s),y-a_2(t-s)\Big)+\exp\left(-\dfrac{(x-a_1(t-s)-a_1s')^2+(y-a_2(t-s)-a_2s')^2}{\varepsilon}\right)\times \\
\times\left(\dfrac{2(x-a_1(t-s))}{\varepsilon}\right)+W_\varepsilon(s',x-a_1(t-s),y-a_2(t-s))\Bigg)W_\varepsilon(s',x_0,y-a_2(t-s))+ \\
+\varepsilon W_\varepsilon(s',x-a_1(t-s),y-a_2(t-s))\Big(V_x(s',x_0,y-a_2(t-s)\Big)- \\
-\dfrac{2(x_0-a_1s')}{\varepsilon}\exp\left(-\dfrac{(x_0-a_1s')^2+(y-a_2(t-s)-a_2s')^2}{\varepsilon}\right)+ \\
+W_\varepsilon(s',x_0,y-a_2(t-s))\Big)\Big]ds'\Big\}ds+Y_x(t,x,y,\varepsilon)\equiv\Big(H_2\big[\xi_\varepsilon,W_\varepsilon\big]\Big)(t,x,y),
\end{cases}
\tag{19}
$$

где

$$
\begin{cases}
Y \equiv \int\limits_0^t Y_1(s, x - a_1(t-s), y - a_2(t-s), \varepsilon)ds + \int\limits_0^t \int\limits_0^s \exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(s-s')\right)\frac{1}{\varepsilon^\beta} f(s') \times \\
\times Y_2(x - a_1(t-s), y - a_2(t-s), \varepsilon)ds'ds, \\
|Y_1| \le \left(\int\limits_0^t \exp\left(-\frac{\lambda q}{\varepsilon^\beta}(t-s)\right)ds\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_0^t \left|V_{s^2}(s,x,y) + a_1 V_{xs}(s,x,y) + a_2 V_{ys}(s,x,y)\right|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} + \\
+\tilde{h}_* \frac{1}{a_1}\sqrt{\pi}\varepsilon^{\frac{1}{2}-\beta} + \varepsilon(Q_0+1)Q_0\frac{1}{\lambda} + 2C_1\varepsilon^{\frac{1}{2}-\beta}(Q_0+1)Q_0\sqrt{\pi}\frac{1}{a_1} \le \\
\le \varepsilon^{\frac{\beta}{q}}\tilde{C}_0\left(\frac{1}{\lambda q}\right)^{\frac{1}{q}} + \tilde{h}_* \frac{1}{a_1}\sqrt{\pi}\varepsilon^{\frac{1}{2}-\beta} + \varepsilon(Q_0+1)Q_0\frac{1}{\lambda} + 2C_1\frac{1}{a_1}\sqrt{\pi}(Q_0+1)\varepsilon^{\frac{1}{2}-\beta} = \\
= \delta_1(\varepsilon), \forall(t,x,y) \in \bar{\Omega}_0, \\
0 \le h_* \le \tilde{h}_* = const, \ \forall(x,y) \in R^2; \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \\
C_1 = \max\limits_{[0,T]}|x_0 - a_1 t|, \ (x_0 = \text{ фиксированная точка из } R_+), \\
\tilde{C}_0 = C_0 + C_0(a_1 + a_2), \ 0 < \beta < \frac{1}{2}, \\
\left\|V_x^{(i)}\right\|_C, \left\|V_y\right\|_C, \left\|V_t\right\|_C \le Q_0, \ \forall(t,x,y) \in \bar{\Omega}_0, \ (i = 0,1), \\
|Y| \le \delta_1(\varepsilon)T + f_0\frac{1}{\lambda}T\,|M_0^{-1}|\,\delta_1(\varepsilon) + f_0\,|M_0^{-1}|\,\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^t \left|g_\varepsilon(x - a_1(t-s), (y - a_2(t-s))\right|ds \le \\
\le \delta_1(\varepsilon)\left(T + \frac{1}{\lambda}f_0 T\,|M_0^{-1}|\right) + f_0\,|M_0^{-1}|\,\frac{1}{\lambda}(T)^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_0^t \left|g_\varepsilon(x - a_1(t-s), (y - a_2(t-s))\right|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \le
\end{cases}
\tag{20}
$$

$$
\begin{cases}
\le \delta_1(\varepsilon)\gamma_0 + \gamma_1\Delta_{01}(\varepsilon) \le \delta_2(\varepsilon), \forall(t,x,y) \in \bar{\Omega}_0, \\
|Y_x| \le \delta_3(\varepsilon), \forall(t,x,y) \in \bar{\Omega}_0, (\gamma_0 = T + \frac{1}{\lambda}f_0 T\,|M_0^{-1}|; \ \gamma_1 = f_0\,|M_0^{-1}|\,\frac{1}{\lambda}(T)^{\frac{1}{q}}).
\end{cases}
$$

Лемма 2. При условиях леммы 1 и (15), (20) и

$$\begin{cases} L_{H_i},\ (i=1,2): \sum_{i=1}^{2} L_{H_i} = d < 1, \\ H_i : S_{r_0} \to S_{r_0},\ \left(S_{r_0} = \left\{\xi_\varepsilon, W_\varepsilon : |\ \xi\ \ _\varepsilon|, |W_\varepsilon| \le r_0, \forall (t,x,y) \in \bar{\Omega}_0\right\}\right), \end{cases} \tag{21}$$

система (19) разрешима в $C\left(\bar{\Omega}_0\right)$, причем

$$\| \xi_\varepsilon \|_C \le \left(1-d\right)^{-1} (\delta_2(\varepsilon) + \delta_3(\varepsilon)) \le \delta_4(\varepsilon). \tag{22}$$

Тогда, на основе (21) имеет место:

$$\begin{cases} \| \eta_\varepsilon(x,y) \|_{L^p(R^2)} \le \delta_0(\varepsilon) + \left|M_0^{-1}\right| L_{H_0} \delta_4(\varepsilon) \le \delta_5(\varepsilon), \\ \left\|Y_2\right\|_{L^p} \le \left|M_0^{-1}\right| (\Delta_0(\varepsilon) + \delta_1(\varepsilon)\tilde{h}_0) \le \delta_0(\varepsilon). \end{cases} \tag{23}$$

Далее, с учетом результатов лемм 1 и 2 из (16) следует:

$$| U_\varepsilon - V | \le \| \xi_\varepsilon \|_C + \exp\left(-\frac{(x-a_1 t)^2 + (y-a_2 t)^2}{\varepsilon}\right). \tag{24}$$

Поэтому, проведя оценку в смысле нормы $L_h^p(\Omega_0)$, имеем:

$$\| U_\varepsilon - V \|_{L_h^p} \le \delta_4(\varepsilon)\tilde{h}_0(T)^{\frac{1}{p}} + (h_0 T)^{\frac{1}{p}} \gamma_0 \varepsilon^{\frac{1}{p}} = \delta_6(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0. \tag{25}$$

Значит на основе (23), (25), имеем:

$$\begin{cases} \tilde{\Psi} \in W_h^p(\Omega_0) = \{(U_\varepsilon - V, Z_\varepsilon - \tilde{Z}) : U_\varepsilon - V \in L_h^p(\Omega_0), Z_\varepsilon - \tilde{Z} \in L^p(R^2)\}, \\ \left\|\tilde{\Psi}\right\|_{W_h^p(\Omega_0)} = \left\|U_\varepsilon - V\right\|_{L_h^p} + \left\|Z_\varepsilon(x,y) - \tilde{Z}(x,y)\right\|_{L^p(R^2)} \le \delta_5(\varepsilon) + \delta_6(\varepsilon) = \Delta(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0, \\ \tilde{\Psi} = (U_\varepsilon - V, Z_\varepsilon - \tilde{Z}). \end{cases} \tag{26}$$

Теорема 1. При условиях лемм 1, 2 СВОЗ (1)–(3) имеет единственное решение по правилу (12), при этом близость решений СВОЗ и вырожденной ОЗ устанавливается в $W_h^p(\Omega_0)$ в виде (22).

Заключение. В заключение можно отметить, что решение сингулярно-возмущенной задачи согласно правилу (12) является единственным, и допускается оценка вида (26). А это значит, что близость решений обратной сингулярно-возмущенной задачи и обратной вырожденной задачи установлены в пространстве $W_h^p(\Omega_0)$ в виде (22).

Полученные результаты могут быть применены к прямым и обратным задачам для уравнения переноса с более сложной структурой в теории сингулярно-возмущенных уравнений и др.

Литература

1. *Васильева А.Б.* Асимптотические разложения решений сингулярно-возмущенных уравнений / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. М.: Наука, 1973. 272 с.
2. *Иманалиев М.И.* Асимптотические методы в теории сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем / М.И. Иманалиев. Фрунзе: Илим, 1972. 356 с.
3. *Омуров Т.Д.* Задача Коши для нелинейного сингулярно-возмущенного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка в неограниченной области / Т.Д. Омуров, А.Р. Алиева // Приволжский научный вестник. Ижевск (Россия). 2016. № 12-1(64). С. 36–43.
4. *Тихонов А.Н.* О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра / А.Н. Тихонов // Математический сборник. 1948. 22(64). Вып. № 2. С. 193–204.
5. *Ахиезер А.И.* Кинетические уравнения Больцмана / А.И. Ахиезер. Киев: ИТФ АН ССР, 1973. 29 с.
6. *Казаков А.Я.* Обратные задачи линейной теории переноса излучения в плоской среде / А.Я. Казаков // ДАН СССР. 1983. 270. № 5. С. 1100–1103.
7. *Омуров Т.Д.* Прямые и обратные задачи односкоростной теории переноса / Т.Д. Омуров, М.М. Туганбаев. Бишкек: Илим, 2010. 116 с.
8. *Frosali, van der Mee, Paveri-Fontana.* Conditions for runaway phenomena in the kinetic theory of particle swams / Frosali, van der Mee, Paveri-Fontana // Journal Math. Phys. 1989. Vol. 30. No. 5. Pp. 1177–1186.