

УДК 539.47

О НОВОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕАКТИВНЫХ УСИЛИЙ
КОНИЧЕСКИХ ПРУЖИН С ЭФФЕКТОМ ПАМЯТИ ФОРМЫ

*С.А. Абдрахманов, Т.Т. Кожошов, Ж.Ж. Доталиева,
А. Абдыжапар, М.Б. Джолдошбаева*

Рассмотрены конические пружины с эффектом памяти формы, работающие на растяжение. При этом её витки, в основном, работают на кручение. Разработан новый метод определения реактивных усилий этой пружины на основе диаграммы сдвига, принятой в виде двухзвенной ломаной.

Ключевые слова: коническая пружина; осевое удлинение; кручение; изотермическое нагружение; память формы; реактивное усилие.

ABOUT THE NEW METHOD OF DETERMINATION OF RECOVERY FORCES
OF CONIC SPRINGS WITH EFFECT OF SHAPE MEMORY

*S.A. Abdrachmanov, T.T. Kojoshov, J.J. Dotalieva,
A. Abdyjapar, M.B. Dzholdoshbaeva*

The article regards the conic springs with effect of shape memory working for stretching. At the same time her loops, generally, work for torsion. The new method of determination of recovery forces of this spring on the basis of the chart of shift, accepted in the form of a two-unit broken line, is developed.

Keywords: conic spring; axial lengthening; torsion; isothermal loading; shape memory; recovery force.

Рассмотрим процесс изотермического деформирования пружины в области температур существования устойчивой мартенситной фазы. Считаем, что механические параметры материала не зависят от времени, т. е. данная задача рассматривается в склерономной постановке, неупругие деформации образуются только за счёт реакции “мартенсит-мартенсит” [1]. Принимаем малый угол подъёма витков и полагаем, что витки пружины работают только на кручение. Модули сдвига материала проволоки в упругой и неупругой областях деформирования в мартенситном состоянии, соответственно, равны: G_M и nG_M , где n – параметр упрочнения ($0 \leq n < \infty$). Коническая пружина имеет следующие параметры: r_1, r_2 – наименьший и наибольший радиусы пружины; i – количество витков; r_0 – радиус прутка. В дальнейшем, в процессе деформирования пружины изменением r_1 и r_2 радиусов пренебрегаем. Отметим, что аналогичная задача с учётом реономных свойств материала рассматривается в работах [2–4], где для упрощения расчётов не учитываются упругие и температурные деформации.

Задача определения реактивных усилий данной пружины разбита на три этапа: 1) получение

зависимости “нагрузка–осевое перемещение” ($P \sim \lambda$) за пределом упругих деформаций; 2) разгрузка и определение величин остаточных осевых перемещений ($\lambda_{ост}$); 3) нагрев пружины в области, включающей интервал температур фазовых превращений, с ограничением процесса свободного формовосстановления и определение генерируемых при этом реактивных усилий.

Рассмотрим первый этап. Пусть пружина растягивается изотермически при температуре T_0 , принадлежащей области температур существования устойчивой мартенситной фазы. Значения крутящего момента M и относительного угла закручивания прутка θ , при котором заканчивается упругая работа пружины, определяются формулами:

$$M_{\phi m} = \tau_{\phi m}^M \cdot W_{\rho}, \quad \theta_{\phi m} = \tau_{\phi m}^M / G_M r_0. \quad (1)$$

Здесь $\tau_{\phi m}^M$ – касательное напряжение, соответствующее началу фазовой текучести в мартенситном состоянии; W_{ρ} – момент сопротивления кручению.

Для определения осевого перемещения используется следующая зависимость:

$$d\lambda = r^2 \theta(M) d\phi. \quad (2)$$

Здесь $\theta(M)$ – относительный угол закручивания прутка, зависящий от крутящего момента $M = P \cdot r$; r – текущий радиус пружины; φ – угловая координата, она отсчитывается от наименьшего радиуса пружины r_1 , т. е. при $\varphi = 0$ $r = r_1$, а при $\varphi = 2\pi i$ (i – число витков) $r = r_2$.

Из формулы (2) следует, что для определения осевого перемещения необходимо найти зависимость $\theta(M)$.

Безразмерная зависимость $\bar{M}(\bar{\theta})$ в упругой и неупругой области деформирования прутка записываются в следующем виде [5]:

$$\bar{M} = \bar{\theta}, \quad (\bar{\theta} \leq 1);$$

$$\bar{M} = n\bar{\theta} + (1-n) \cdot (4 - 1/\bar{\theta}^3) / 3, \quad (\bar{\theta} \geq 1) \quad (3)$$

Здесь $\bar{M} = M / M_{\phi m}$ и $\bar{\theta} = \theta / \theta_{\phi m}$.

Для использования зависимости (3) при определении осевого перемещения пружины необходимо обратить эту зависимость, т. е. получить обратную функцию $\theta(M)$. Для этого необходимо решить следующее алгебраическое уравнение относительно θ :

$$(1 - 3N)\theta^4 + (4N - M)\theta^3 - N = 0, \quad (M \geq 1) \quad (4)$$

где для удобства “чёрточки” над функциями M и θ (здесь и в дальнейшем) опущены; $N = (1-n)/3$.

Исходя из физической сути данной задачи, задавая значение нагрузки M и решая для неё уравнение (4), мы можем построить график зависимости θ от M .

Для построения графика функции $\theta(M)$ перепишем уравнение (3) в виде

$$M(\theta) = 4N + (1 - 3N)\theta - N / \theta^3. \quad (5)$$

Эта кривая имеет асимптоту, уравнение которой

$$M_1(\theta) = 4N + (1 - 3N)\theta. \quad (6)$$

Учитывая данное обстоятельство, разобьём кривую $M(\theta)$ на два участка. Пусть для относительных углов закручивания $1 \leq \theta \leq \theta_*$ она определяется формулой (5), а для углов закручивания $\theta = \theta_*$ её заменим прямой, параллельной её асимптоте. С учётом формул (5) и (6), уравнение этой прямой определяется следующим выражением:

$$M_2(\theta) = (4N - N/\theta_*^3) + (1 - 3N)\theta. \quad (7)$$

Величину θ_* , входящую в уравнение (7), выбираем таким образом, чтобы разность между функцией $M(\theta)$ и её асимптотой не превышала 5%. Следовательно, при $\theta = \theta_*$ должно выполняться следующее уравнение:

$$1,05M(\theta_*) = M_1(\theta_*). \quad (8)$$

Далее, эту кривую $M(\theta)$ на участке $1 \leq \theta \leq \theta_*$ аппроксимируем следующей параболой:

$$M(\theta) = a'_0 + a'_1\theta + a'_2\theta^2. \quad (9)$$

Поступая аналогичным образом, для обратной функции $\theta(M)$ запишем:

$$\theta(M) = a_0 + a_1M + a_2M^2, \quad 1 \leq M \leq M(\theta_*). \quad (10)$$

Здесь коэффициенты a_i ($i = 0, 1, 2$) находятся из условия равенства функций, определяемых формулами (5) и (10) в двух крайних точках выбранного интервала, а также совпадения касательной к кривой (10) в точке $M_1 = \theta_1 = 1$.

Для получения обратной функции $\theta(M)$ при значениях, больших $M(\theta_*)$, обратим зависимость (7). Решая это уравнение относительно θ , получаем:

$$\theta = [M - N(4 - 1/\theta_*^3)] / (1 - 3N) = b_0 + b_1M. \quad (11)$$

Таким образом, кривая $\theta(M)$ разбита нами на два участка. На участке, где $1 \leq \theta \leq \theta_*$, она определяется выражением (10), а далее, при $\theta > \theta_*$ – уравнением (11).

Теперь рассмотрим различные этапы работы пружины. Приравнивая значение максимального крутящего момента величине $M_{\phi m}$, определим силу, до которой пружина работает в упругой области:

$$P_{\phi m} = M_{\phi m} / r_2. \quad (12)$$

При нагрузке $P > P_{\phi m}$ в пружине образуются две зоны: упругая и неупругая. В упругой зоне крутящий момент от нагрузки P меньше, чем M_{DB} , а в неупругой – больше. Радиус пружины, отделяющий эти две зоны:

$$r_{\phi m} = M_{\phi m} / P, \quad (r_1 < r_{\phi m} \leq r_2). \quad (13)$$

При дальнейшем увеличении нагрузки, начиная от силы $P = P_*$, в неупругой области образуется ещё одна зона. При этом, нагрузка P_* определяется из условия равенства угла закручивания витка пружины радиуса r_2 значению θ_* , а крутящий момент равен M_* . Следовательно,

$$P_* = M_* / r_2. \quad (14)$$

Таким образом, при растягивающей силе $P > P_*$ в пружине имеем три зоны: зона, где $\theta < \theta_{\phi m}$ ($r_1 < r_{\phi m} \leq r_2$), зона, где $\theta_{\phi m} \leq \theta \leq \theta_*$ ($r_{\phi m} < r \leq r_*$) и зона, где $\theta > \theta_*$ ($r_* < r \leq r_2$). Здесь

$$r_* = M_* / P. \quad (15)$$

Очевидно, что при нагрузке, определяемой формулой

$$P_{**} = M_{\phi m} / r_1 = P_{\phi m} \cdot r_2 / r_1, \quad (16)$$

чисто упругая зона пружины исчезает.

При нагрузках $P > P_{**}$ относительный угол закручивания пружины определяется только выражением (11). В этом случае

$$P_{***} = M_* / r_1 = P_* \cdot r_2 / r_1. \quad (17)$$

Интегрируя уравнение (2), с использованием зависимостей $\theta(M)$ получены формулы $P \sim \lambda$ для различных этапов нагружения пружины. В частности, для конической пружины с постоянным углом подъёма они имеют следующий вид:

$$\lambda = P(r_2^3 - r_1^3) / 3mc, \quad (P < P_{\phi m}) \quad (18)$$

$$\lambda = \frac{P(r_{\phi m}^3 - r_1^3)}{3mc} + \frac{\theta_{\phi m}}{m} \left[\frac{a_0}{2} (r_2^2 - r_{\phi m}^2) + \frac{a_1 P}{3M_{\phi m}} (r_2^3 - r_{\phi m}^3) + \frac{a_2 P^2}{4M_{\phi m}^2} (r_2^4 - r_{\phi m}^4) \right] \quad (P_{\phi m} \leq P \leq P_*) \quad (19)$$

$$\lambda = \frac{P(r_{\phi m}^3 - r_1^3)}{3mc} + \frac{\theta_{\phi m}}{m} \left[\frac{a_0}{2} (r_*^2 - r_{\phi m}^2) + \frac{a_1 P}{3M_{\phi m}} (r_*^3 - r_{\phi m}^3) + \frac{a_2 P^2}{4M_{\phi m}^2} (r_*^4 - r_{\phi m}^4) + \frac{b_0}{2} (r_2^2 - r_*^2) + \frac{b_1 P}{3M_{\phi m}} (r_2^3 - r_*^3) \right], \quad (P_* \leq P \leq P_{**}) \quad (20)$$

$$\lambda = \frac{\theta_{\phi m}}{m} \left[\frac{a_0}{2} (r_*^2 - r_1^2) + \frac{a_1 P}{3M_{\phi m}} (r_*^3 - r_1^3) + \frac{a_2 P^2}{4M_{\phi m}^2} (r_*^4 - r_1^4) + \frac{b_0}{2} (r_2^2 - r_*^2) + b_1 P (r_2^3 - r_*^3) / 3M_{\phi m} \right], \quad (P_{**} < P < P_{***}) \quad (21)$$

$$\lambda = \theta_{\phi m} \left[b_0 (r_2^2 - r_1^2) / 2 + b_1 P (r_2^3 - r_1^3) / 3M_{\phi m} \right] / m, \quad (P > P_{***}) \quad (22)$$

Здесь $m = (1/2\pi i) \ln(r_2 / r_1)$, $c = GJ_p$ – жёсткость прутка пружины на кручение.

Безразмерные графики $\bar{P} \sim \bar{\lambda}$ в зависимости от параметра упрочнения n приведены на рисунке 1, а, где $\bar{P} = P / P_{\phi m}^M$, $\bar{\lambda} = \lambda / \lambda_{\phi m}^M$. Здесь $\lambda_{\phi m}^M$ равно значению λ при силе $P = P_{\phi m}^M$.

Рассмотрим второй этап реализации нашей задачи. Пусть пружина после активного нагружения разгружается при силе $P = P_{раз}$. Очевидно, что если сила $P_{раз}$ меньше по величине $P_{\phi m}^M$, то остаточная деформация пружины будет равна нулю. Учитывая, что разгрузка пружины происходит по упругому закону, остаточные осевые перемещения ($\lambda_{ост}$) при разгрузке от силы $P_{раз}$ ($P_{раз} \geq P_{\phi m}^M$) будем определять по формуле:

$$\lambda_{ост} = (\lambda - \lambda_y) \Big|_{P=P_{раз}}, \quad (23)$$

где осевые перемещения (λ) зависят от величины растягивающей силы и определяются формулами (19–22), а величина упругого перемещения при разгрузке (λ_c) определяется по формуле (18) заменой величины силы P на $P_{раз}$, т. е.

$$\lambda_y = P_{раз} (r_2^3 - r_1^3) / 3mc. \quad (24)$$

На рисунке 1, б приведены безразмерные графики $\bar{P}_{раз} \sim \bar{\lambda}_{ост}$ в зависимости от параметра упрочнения n , где $\bar{P}_{раз} = P_{раз} / P_{\phi m}^M$, $\bar{\lambda}_{ост} = \lambda_{ост} / \lambda_{\phi m}^M$.

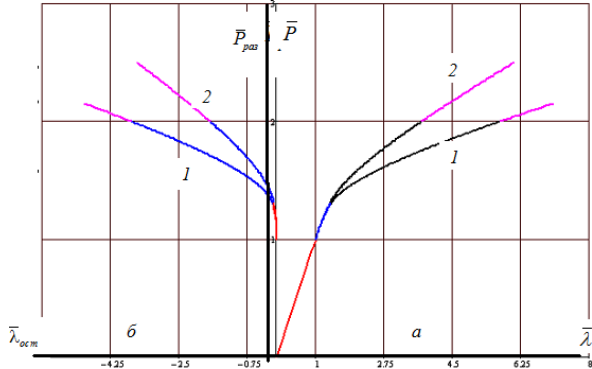


Рисунок 1 – а – безразмерный график зависимости “нагрузка-осевое перемещение” при активном нагружении пружины; б – безразмерный график зависимости “усилие разгрузки-остаточное удлинение” пружины после её разгрузки.

Кривые 1, 2 соответствуют параметрам упрочнения n , равным: 0,1; 0,2. Отношение радиусов пружины r_2/r_1 принято равным 2

Переходим к этапу определения реактивных усилий данной пружины. Для этого закрепим концы пружины после её разгрузки так, чтобы они препятствовали осевым перемещениям, и рассмотрим процесс нагрева пружины, включающий область температур фазовых переходов от мартенсита в аустенит. В этом случае она генерирует реактивные усилия (R), направленные вдоль оси пружины [6]. В данной работе предполагается, что характеристические температуры фазовых превращений (A_n, A_k и M_n, M_k) не зависят от напряжений. Здесь A_n, A_k – температуры начала и конца аустенитного превращения, а M_n, M_k – то же самое для мартенситного превращения.

Рассмотрим процесс нагрева пружины от температуры T_0 до T_k , причём для включения интервала температур области фазовых превращений должно быть $T_0 < M_k$, а $T_k > A_k$. Разобьём процесс нагрева на три этапа. Первый и третий этапы соответствуют нагреву пружины до начала и после конца аустенитного превращения, т. е. на первом этапе $T_0 \leq T \leq A_n$, температура меняется до начала температур обратного мартенситного превращения, а на третьем этапе $A_k \leq T \leq T_k$, пружина нагревается за пределами температур фазовых превращений.

На первом и третьем этапах нагревания, когда отсутствуют или завершены фазовые превращения,

условие совместности деформаций для данной пружины можно записать как

$$d(\lambda_R) + d(\lambda_t) = 0, \quad (25)$$

где λ_R и λ_t – осевые перемещения пружины, вызванные, соответственно, реактивной силой R и изменением температуры T .

Условие совместности деформаций на втором этапе нагревания записываются как

$$d(\lambda_{R,c}) + d(\lambda_{t,\beta}) + d(\lambda_{нф}) = 0, \quad (26)$$

где $\lambda_{R,c}$ – перемещение пружины, вызванное реактивной силой R и изменением жёсткости пружины c ; $\lambda_{t,\beta}$ – то же самое, вызванное изменением температуры и β ; $\lambda_{нф}$ – перемещение, вызванное эффектом памяти формы. Здесь β – коэффициент температурного расширения пружины.

Как показывают эксперименты [1], появление неупругих фазовых деформаций приводит к упрочнению пружины. В результате этого при повторном нагружении пружина ведёт себя практически упруго до величины силы разгрузки. На основании этого при определении величины реактивной силы R , растягивающей пружину после её разгрузки, будем исходить из зависимостей, полученных для данной пружины при её упругой работе. Тогда можем записать

$$\lambda_R = R / c. \quad (27)$$

При нагреве пружины её физико-механические характеристики меняются, особенно в области фазовых превращений. Для упрощения расчётов их значения в мартенситном и аустенитном состояниях считаем постоянными, а в переходной зоне пусть они меняются по линейному закону

$$\eta = a_\eta + b_\eta T, \quad (28)$$

где

$$a_\eta = (\eta_A \cdot M_K - \eta_M \cdot M_H) / (M_K - M_H), \\ b_\eta = (\eta_M - \eta_A) / (M_K - M_H). \quad (29)$$

Здесь η равно коэффициенту температурного расширения β или жёсткости пружины c ; η_A, η_M – значения параметра η в аустенитном и мартенситном состояниях.

Температурные удлинения пружины, очевидно, равны изменению её высоты dH_t . Для её определения можно получить следующее выражение:

$$d\lambda_t = dH_t = H_0 \beta_M dT. \quad (30)$$

Здесь H_0 – высота пружины перед нагревом, т.е. при температуре $T = T_0$.

Расписывая условие (25) с учётом формул (27) и (30) для первого и третьего этапа нагревания, получаем:

$$R(T) = -H_0 c_M \beta_M (T - T_0), \quad (T_0 \leq T \leq A_n) \quad (31)$$

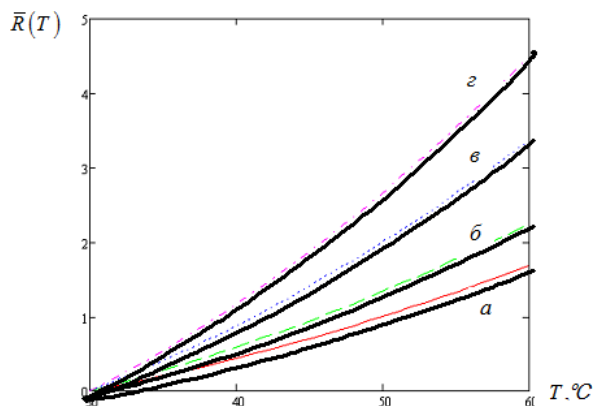


Рисунок 2 – График зависимости безразмерного реактивного усилия \bar{R} от температуры нагрева пружины T . Для линий а, б – $\bar{\lambda}_{очм} = 1,5$; при этом для линии а – $\xi = 0,75$; для линии б – $\xi = 1$. Для линий в и г – $\bar{\lambda}_{очм} = 3$; при этом для линии в – $\xi = 0,75$; для линии г – $\xi = 1$

$$R(T) = R(A_k) - H_0 c_A \beta_A (T - A_k), \quad (A_k \leq T \leq T_k) \quad (32)$$

где $R(A_k)$ – величина реактивной силы, соответствующая концу второго этапа нагревания.

Перемещение пружины, полученное в процессе обратного мартенситного превращения при её нагреве, назовём перемещением, связанным с памятью формы. Считаем, что восстановление формы пружины происходит пропорционально температуре. Тогда для него можно записать следующее выражение:

$$d(\lambda_{нф}) = -\xi \lambda_{очм} dT / (A_k - A_n) \quad (33)$$

где ξ – параметр, характеризующий полноту формовосстановления ($\xi \leq 1$).

Принимая во внимание формулы (27), (30) и (33), и интегрируя условие (26), получаем:

$$R(T) = \frac{c(T)}{c_M} R(A_n) + \\ c(T) \left\{ \frac{\xi \lambda_{очм} (T - A_n)}{A_k - A_n} - H_0 \left[a_\beta (T - A_n) + \frac{b_\beta}{2} (T^2 - A_n^2) \right] \right\}. \quad (34)$$

Далее рассмотрим материалы, обладающие небольшим гистерезисом области фазовых превращений, а также сравнительно невысокими абсолютными температурами проявления эффекта памяти формы. При определении реактивных усилий пружин из таких материалов в формуле (34) можно пренебречь чисто температурными слагаемыми. Следовательно, в безразмерном виде можем записать:

$$\bar{R}(T) = \xi \bar{\lambda}_{очм} c(T) \cdot (T - A_n) / c_M (A_k - A_n). \quad (A_n \leq T \leq A_k) \quad (35)$$

Здесь $c(T)/c_M = G(T)/G_M$, $G(T)$ – значение модуля сдвига материала при температуре T , $\bar{\lambda}_{ост} = \lambda_{ост}^M / \lambda_{фм}^M$, $\bar{R}(T) = R(T)/P_{фм}^M$ для расчётов принималось $G_M = 20 \text{ ГПа}$, $G_A / G_M = 1,5$, $P_{фм}^M = 6 \text{ Н}$, $A_n = 30^\circ\text{C}$, $A_k = 60^\circ\text{C}$.

На рисунке 2 приведены графики зависимости $\bar{R}(T)$ для различных $\bar{\lambda}_{ост}$ и ξ , для пружины с отношением r_2 / r_1 , равным 2.

Литература

1. Лихачёв В.А. и др. Эффект памяти формы / В.А. Лихачёв и др. Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. 216 с.
2. Мовчан А.А. Анализ работы пружин из сплава с памятью формы в рамках модели нелинейного деформирования этих материалов / А.А. Мовчан, Зин Аунг Тант // Механика композиционных материалов и конструкций. 2009. Т. 15. № 4. С. 591–600.
3. Мовчан А.А. Реономные свойства сплавов с памятью формы, проявляемые в опытах на мартенситную неупругость и сверхупругость / А.А. Мовчан, С.А. Казарина, Зин Аунг Тант // Механика композиционных материалов и конструкций. 2010. Т. 16. № 3. С. 305–311.
4. Тант Зин Аунг. Деформационное упрочнение и реономные свойства сплавов с памятью формы / Зин Аунг Тант: автореф. дис. ... канд. техн. наук. М., 2010. 21 с.
5. Абдрахманов С.А. Кручение вала в неупругой области деформирования / С.А. Абдрахманов, А. Абдыжапар // Известия КГТУ им. И. Раззакова. 2013. № 30. С. 86–88.
6. Абдрахманов С.А. Деформация материалов с памятью формы при термосиловом воздействии / С.А. Абдрахманов. Бишкек: Илим, 1991. 116 с.