

УДК 622.831
DOI: 10.36979/1694-500X-2022-22-8-190-197

О ВЛИЯНИИ СРЕДНЕГО ГЛАВНОГО НАПРЯЖЕНИЯ НА ДЕФОРМАЦИОННЫЕ И ПРОЧНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГОРНЫХ ПОРОД

Б.А. Рычков, Н.М. Комарцов

Аннотация. На примере известных экспериментальных данных К. Моги показано, что при неравномерном трехосном сжатии горные породы находятся в состоянии упругопластического чистого сдвига с наложением всестороннего равномерного разрыхления. Это обстоятельство вытекает из сравнения полученных в опыте значений параметров Лодэ-Надаи для напряжений и деформаций, характеризующих вид напряженного и деформированного состояния. Установлено, что при объёмном нагружении призматических образцов мрамора, создающем напряженное состояние, близкое к обобщённому сжатию, соответствующее деформированное состояние оказывается близким к чистому сдвигу. При этом соотношение между компонентами тензора деформаций к моменту разрушения создает вполне однозначную картину плоскости среза: эта плоскость расположена параллельно промежуточному (среднему) главному напряжению. На основе анализа экспериментальных данных для мрамора предложены определяющие соотношения связи между напряжениями и неупругими деформациями.

Ключевые слова: горная порода; объёмное сжатие; плоская деформация; всестороннее разрыхление.

ОРТОЧО БАШКЫ ЧЫҢАЛУУЛАРДЫН ТОО ТЕКТЕРИНИН ДЕФОРМАЦИЯСЫНА ЖАНА БЕКЕМДИК КАСИЕТИНЕ ТИЙГИЗГЕН ТААСИРИ ЖӨНҮНДӨ

Б.А. Рычков, Н.М. Комарцов

Аннотация. К. Могинин белгилүү эксперименталдык маалыматтарынын мисалында бирдей эмес үч октук кысууда тоо тектери бир тектүү жумшартуу менен серпилгич-пластикалык таза жылышуу абалында болору көрсөтүлгөн. Бул жагдай чыңалуу жана деформацияланган абалдын түрүн мүнөздөгөн чыңалуу жана деформация боюнча экспериментте алынган Лодэ-Надаинин параметрлеринин маанилерин салыштыруудан келип чыгат. Жалпыланган кысылууга жакын чыңалуу абалын түзүүчү призмалык мрамор үлгүлөрүн көлөмдүк жүктөөдө тиешелүү деформацияланган абал таза жылышууга жакын экени аныкталган. Мында бузулуу учуруна карата деформация тензорунун компоненттеринин ортосундагы катыш жылуу тегиздигинин толук бир маанилүү көрүнүшүн түзөт: бул тегиздик аралык (орточо) башкы чыңалууга параллель жайгашкан. Мрамор боюнча эксперименттик маалыматтарга талдоо жүргүзүүнүн негизинде чыңалуулар менен ийкемсиз деформациялардын ортосундагы аныктоочу байланыштар сунушталган.

Түйүндүү сөздөр: тоо тектери; көлөмдүү кысуу; жалпак деформация; ар тараптуу жумшаруу.

ABOUT THE INFLUENCE OF MEDIUM PRINCIPAL STRESS ON THE STRAIN AND STRENGTH CHARACTERISTICS OF ROCKS

B.A. Rychkov, N.M. Komartsov

Abstract. Using the well-known experimental data of K. Mogi, it is shown that in the case of non-uniform triaxial compression, rocks are in a state of elastic-plastic pure shear with the imposition of all-round uniform loosening. This fact follows from a comparison of the Lode-Nadai parameters values for stresses and strains, which obtained in the experiment and characterized the type of stressed and strained state. It has been established that under volume loading of prismatic marble samples, which creates a stress state close to generalized compression, the corresponding strained state is close to pure shear. At the same time, the ratio between the components of the strain tensor by the

moment of failure creates a completely unambiguous picture of the shear plane: this plane is located parallel to the intermediate (average) principal stress. As a result of the analysis of the indicated experimental data for marble carried out in this way, the constitutive relations between stresses and inelastic strains are proposed.

Keywords: rock; volumetric compression; plane strain; all-round loosening.

Введение. Известно, что горные породы при естественном залегании в горных массивах вокруг выработок находятся в состоянии неравномерного трехосного сжатия. Поэтому определение прочностных и деформационных свойств горных пород при таком виде напряженно-деформированного состояния достаточно актуально. Они представлены, в частности, в работах [1–5] и др.

Одной из основных задач этих исследований была оценка влияния промежуточного главного напряжения на прочность и деформируемость горных пород.

В настоящее время многие исследователи по-разному относятся к данной проблеме, особенно в сфере прочностных свойств. Одни исключают влияние среднего главного напряжения, т.к. оно параллельно плоскости среза [6], другие считают, что его влияние находится в пределах точности измерений [7], третьи полагают, что ошибка при неучете второго главного напряжения применительно к прочностным характеристикам составляет не более 15 % [8].

Однако до сих пор нет общепринятой оценки влияния промежуточного главного напряжения не только на прочностные, но и на деформационные характеристики горных пород. Именно последнему аспекту уделено особое внимание в данной работе.

1. Постановка задачи исследования. Рассмотрим результаты экспериментов, проведенных К. Моги при неравномерном трехосном сжатии призматических образцов горных пород, представленных в работе [5]. Проанализируем характер разрушения этих образцов и диаграммы деформаций, начиная от предела упругости вплоть до предела прочности.

На рисунке 1 приведена картина разрушения образца мрамора при трехосном сжатии, когда между главными напряжениями (σ_i , $i = 1, 2, 3$) выполняется условие $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. На этом рисунке отчетливо просматривается плоскость среза, параллельная направлению промежуточного главного напряжения σ_2 .

Для сопоставления заданного в эксперименте вида напряженного состояния с полученным в результате опыта видом деформированного состояния, вычислим значения коэффициентов Лоде-Надаи



Рисунок 1 – Плоскость среза для мрамора при $\sigma_1 = 275$ МПа, $\sigma_2 = 107$ МПа, $\sigma_3 = 25$ МПа

для напряжений μ_σ и деформаций μ_ε при принятых в сопротивлении материалов знаках (сжимающие напряжения отрицательны) (таблицы 1, 2).

На рисунках 2 и 3 видно, что при указанных напряженных состояниях, близких к состоянию обобщенного сжатия, при котором коэффициент μ_σ заметно больше нуля, соответствующие деформируемые состояния концентрируются около значений $\mu_\varepsilon = 0$. Это означает, что в данных случаях объемного сжатия реализуется деформируемое состояние, близкое к чистому сдвигу. Приведенная картина разрушения образца (рисунок 1) и полученное заключение о виде деформированного состояния при разрушении, дают основание считать, что влияние промежуточного главного напряжения σ_2 вызывает состояние плоской деформации на площадке действия минимального и максимального главных напряжений.

Далее будем считать, как это принято в механике горных пород, напряжения сжатия – положительные, а напряжения растяжения – отрицательные.

2. Расчетные соотношения. Примем, что для горных пород компоненты тензора деформаций можно представить в виде:

$$\varepsilon_i = e_i + \Gamma_i + \Gamma_i^p, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

где ε_i – главная (упругая + неупругая) деформация; e_i – компонента упругой деформации, подчиняющаяся закону Гука; Γ_i – компонента чисто пластической деформации, не вызывающая изменение объема; Γ_i^p – деформация разрыхления.

Согласно гипотезе В.В. Новожилова о всестороннем изотропном разрыхлении [9], сопровождающем неупругую деформацию, будем считать:

$$\Gamma_1^p = \Gamma_2^p = \Gamma_3^p = \Gamma^p. \quad (2)$$

Также, учитывая предположение о том, что горные породы при неравномерном трехосном сжатии ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$) находятся в состоянии упруго пластического чистого сдвига в плоскости главных напряжений 1–3, полагаем:

$$\begin{aligned} e_1 &= -e_3, \\ \Gamma_1 &= -\Gamma_3, \\ \Gamma_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Принимая во внимание (2) и (3), главные деформации представим в виде:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = e_1 + \Gamma_1 + \Gamma^p, \\ \varepsilon_2 = e_2 + \Gamma^p, \\ \varepsilon_3 = -e_1 - \Gamma_1 + \Gamma^p. \end{cases} \quad (4)$$

3. Сопоставление расчетных и экспериментальных данных. Программа нагружения призматических образцов горных пород, представленная в работе [5], состояла из трех этапов. Сначала прикладывалось гидростатическое давление до различного уровня. Затем, при фиксированных значениях главных напряжений $\sigma_3 = \sigma_1$ задавалось приращение боковой нагрузки в направлении σ_2 до различных значений. На третьем участке траектории нагружения при достигнутых σ_2 и σ_3 (на втором участке нагружения) осевая нагрузка увеличивалась с постоянной скоростью деформации (10^{-4} сек⁻¹), вплоть до разрушения образца.

Необходимые для теоретических расчетов величины содержатся в данной работе в виде некоторой совокупности зависимостей (на соответствующих графиках) между напряжениями и деформациями,

Таблица 1 – Значения коэффициентов Лодэ-Надаи для напряжений и деформаций при $\sigma_2 = -105 \text{ МПа}$, $\sigma_1 = -25 \text{ МПа}$

$-(\sigma_3 - \sigma_1)$	$-\varepsilon_1$	$-\varepsilon_2$	$-\varepsilon_3$	$-\sigma_3$	μ_σ	μ_ε
215,96	0,5	-0,22	-0,697	240,96	0,259	0,165
227,6	0,75	-0,42	-1,374	252,6	0,297	0,101
235,5	1	-0,632	-2,219	260,504	0,321	0,073
246,2	1,374	-0,954	-3,612	271,2	0,350	0,052

Таблица 2 – Значения коэффициентов Лодэ-Надаи для напряжений и деформаций при $\sigma_2 = -58 \text{ МПа}$, $\sigma_1 = -25 \text{ МПа}$

$-(\sigma_3 - \sigma_1)$	$-\varepsilon_1$	$-\varepsilon_2$	$-\varepsilon_3$	$-\sigma_3$	μ_σ	μ_ε
148,54	0,25	-0,041	-0,269	173,535	0,556	0,121
194,56	0,5	-0,15	-0,718	219,56	0,661	0,067
207,5	0,75	-0,33	-1,322	232,5	0,682	0,042
212,55	1	-0,599	-2,108	237,552	0,689	0,029
215,48	1,402	-0,99	-3,291	240,481	0,694	0,019

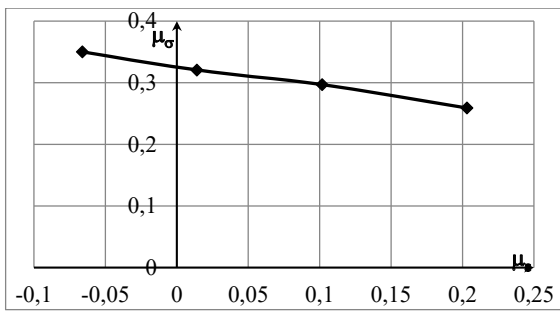


Рисунок 2 – Зависимость вида деформированного состояния от вида напряженного состояния при фиксированных значениях напряжений $\sigma_2 = -105 \text{ МПа}$, $\sigma_1 = -25 \text{ МПа}$ и переменном напряжении σ_3

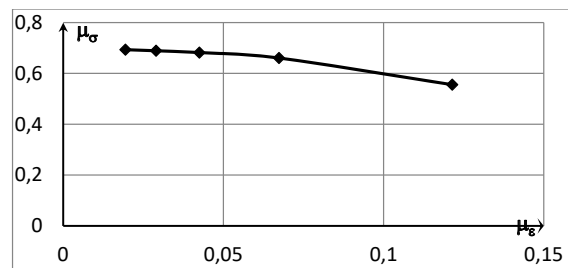


Рисунок 3 – Зависимость вида деформированного состояния от вида напряженного состояния при фиксированных значениях напряжений $\sigma_2 = -58 \text{ МПа}$, $\sigma_1 = -25 \text{ МПа}$ и переменном напряжении σ_3

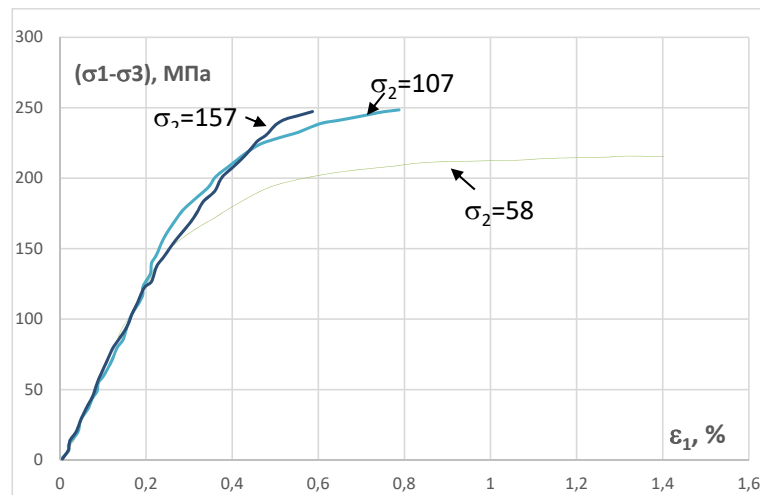


Рисунок 4 – Оцифрованные кривые $\sigma_1 - \sigma_3 \sim \varepsilon_1$ при $\sigma_3 = 25 \text{ МПа}$

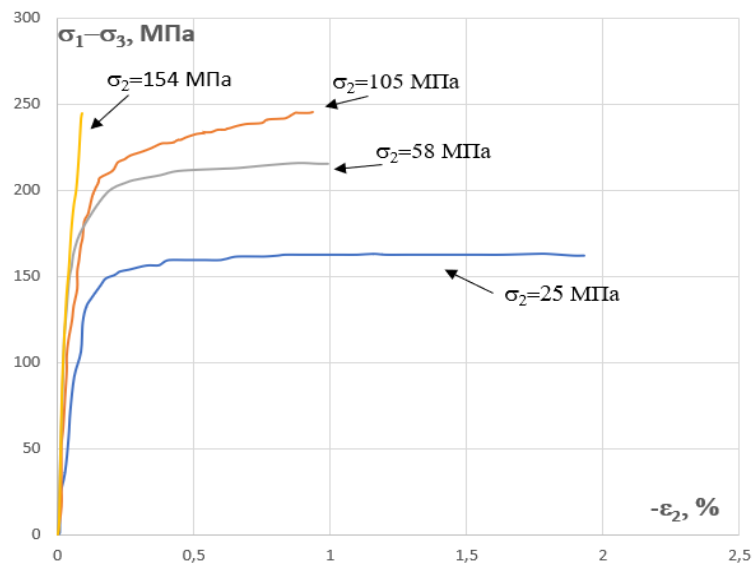


Рисунок 5 – Зависимости $\sigma_1 - \sigma_3 \sim \varepsilon_2$ при $\sigma_3 = 25 \text{ МПа}$ и различных значениях σ_2 .

Таблица 3 – Значения фиктивных модулей упругостей E_1 и E_2 для различных боковых давлений, осуществленных в эксперименте

	$E_1, \text{ МПа}$	$E_2, \text{ МПа}$
$\sigma_2 = 58 \text{ МПа}, \quad \sigma_3 = 25 \text{ МПа}$	609,92	4764,7
$\sigma_2 = 105 \text{ МПа}, \quad \sigma_3 = 25 \text{ МПа}$	759,79	2123,5
$\sigma_2 = 154 \text{ МПа}, \quad \sigma_3 = 25 \text{ МПа}$	608,96	4759,1

а значения пределов упругости и прочности приведены в табличном виде. Оцифровка указанных графических зависимостей и сопоставление их с табличными величинами, показывают достоверность всех представленных в монографии исходных данных в реальном масштабе их изображения. Это дает возможность в дальнейшем использовать все необходимые цифровые данные.

В качестве проверки введенных модельных соотношений по заданным экспериментальным значениям продольной ε_1 и поперечной ε_2 деформаций произведем расчет значений поперечной деформации ε_3 и сопоставим с данными эксперимента для третьего участка траектории нагружения, где, фактически, под значениями σ_1 и σ_3 понимаются их приращения.

Сначала определим упругие деформации e_1 и e_2 . Так как К. Моги представлял исходные экспериментальные данные в осях $\sigma_1 - \sigma_3 \sim \varepsilon_i$, то для расчетов упругой деформации применим не обобщенный закон Гука, а закон упругости в форме:

$$e_i = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{E_i}, \quad (i = 1, 2) \quad (5)$$

где E_i – фиктивные модули упругости, которые, как трактовал К. Моги, являются переменными величинами¹.

Для реализации формул (5) по начальным линейным участкам графиков $\sigma_1 - \sigma_3 \sim \varepsilon_1$ (рисунок 4) и $\sigma_1 - \sigma_3 \sim \varepsilon_2$ (рисунок 5) определим введенные фиктивные модули упругости E_1 и E_2 . Результаты вычислений приведены в таблице 3.

Зная значения упругой деформации e_2 и главной деформации ε_2 в данной точке траектории нагружения, из второго уравнения (4) можно определить деформацию разрыхления Γ^p . Затем, из первого уравнения (4) для заданной деформации ε_1 , вычисленной по (5) упругой деформации e_1 и найденной деформации разрыхления Γ^p , определяется чисто пластическая деформация Γ_1 . Таким образом, все компоненты поперечной деформации ε_3 , согласно третьему уравнению (4), будут найдены. Это дает возможность сравнить расчетные значения деформации ε_3 с ее экспериментальными значениями.

С использованием данной методики были произведены расчеты для различных значений бокового давления σ_2 (58 МПа, 105 МПа, 154 МПа) и фиксированного значения $\sigma_3 = 25 \text{ МПа}$, реализованных в экспериментах. Пример таких расчетов приведен в таблице 4 и на рисунке 6 в сопоставлении с экспериментальными данными. В этой таблице приведены экспериментальные значения поперечной деформации ε_3^e (рисунок 6) и процент отклонения (Δ) расчетных от экспериментальных величин этой деформации, который вычислялся по формуле:

$$\Delta = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_3^e}{\varepsilon_3^e} \cdot 100\%.$$

Как видно, это отклонение не превышает $\pm 15\%$, что для горных пород находится в пределах разброса экспериментальных данных [4].

¹ На самом деле, если рассматривать данный закон не в приращениях напряжений, а в их конечных значениях для данной точки траектории нагружения, то для изотропного материала, как показано в [10], модуль Юнга является константой.

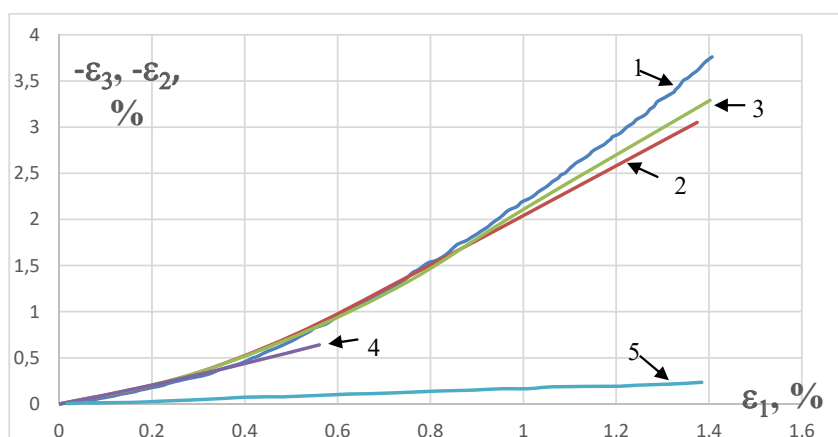


Рисунок 6 – Экспериментальная и расчетные кривые поперечной деформации ε_3 при различных значениях σ_2 и фиксированном значении $\sigma_3 = 25 \text{ МПа}$:
 1 – экспериментальная кривая при $\sigma_2 = 105 \text{ МПа}$, 2 – расчетная кривая при $\sigma_2 = 105 \text{ МПа}$,
 3 – расчетная кривая при $\sigma_2 = 58 \text{ МПа}$, 4 – расчетная кривая при $\sigma_2 = 154 \text{ МПа}$
 5 – экспериментальная кривая ε_2 при $\sigma_2 = 105 \text{ МПа}$

Таблица 4 – Результаты расчетов для поперечной деформации ε_3 при $\sigma_2 = 105 \text{ МПа}$, $\sigma_3 = 25 \text{ МПа}$

$\sigma_1 - \sigma_3$	ε_1	$-\varepsilon_2$	e_1	$-e_2$	$-e_3$	$-\Gamma^p$	Γ_1	$-\Gamma_3$	$-\varepsilon_3$	$-\varepsilon_3^3$	$\Delta, \%$
168,1	0,25	0,09	0,22	0,09	0,22	0,01	0,04	0,04	0,27	0,24	10,7
216,0	0,5	0,22	0,28	0,10	0,28	0,12	0,33	0,33	0,74	0,70	5,7
227,6	0,75	0,42	0,30	0,11	0,30	0,31	0,76	0,76	1,38	1,37	0,1
235,5	1	0,63	0,31	0,11	0,31	0,52	1,21	1,21	2,04	2,22	-8
246,2	1,37	0,95	0,32	0,12	0,32	0,84	1,89	1,83	3,05	3,61	-15,5

Заключение. Показано, что для исследованных горных пород при объемном сжатии (отличном от гидростатического давления) основная особенность их деформированного состояния заключается в следующем. При рассмотренном неравномерном трехосном сжатии ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$) горные породы находятся в состоянии упруго-пластического чистого сдвига (по определенной плоскости скольжения) с наложением всестороннего разрыхления. Этот вывод подтверждается (для реализованных в опыте траекторий нагружения) сопоставлением значений параметров Лоде-Надаи для деформаций μ_ε и напряжений μ_σ , а именно: $\mu_\varepsilon \approx 0$, а μ_σ значительно больше нуля. Кроме того, в отличие от случая равномерного бокового давления, при неравномерном трехосном сжатии поперечные деформации в двух взаимно перпендикулярных направлениях заметно отличаются друг от друга, что является следствием (установленного в данной работе) влияния среднего главного напряжения.

Ориентацию плоскости среза (совпадающей с плоскостью скольжений) можно определить, если использовать, например, критерий прочности Дуйшеналиева–Койчуманова [11].

Поступила: 14.06.22; рецензирована: 28.06.22; принята: 30.06.22.

Литература

1. *Алексеев А.Д.* Предельное состояние горных пород / А.Д. Алексеев, Н.В. Недодаев. Киев: Наукова думка, 1982. 200 с.
2. *Ильницкая Б.И.* Исследование свойств горных пород в различных условиях трехосного напряженного состояния / Б.И. Ильницкая // В кн.: Исследования физических свойств горных пород. М.: Недра, 1973. С. 127–139.
3. *Чирков С.Е.* Прочность горных пород при трехосном неравнокомпонентном сжатии / С.Е. Чирков // ФТПРПИ. 1976. № 1. С. 11–17.
4. *Карташов Ю.М.* Прочность и деформируемость горных пород / Ю.М. Карташов, Б.В. Матвеев, Г.В. Михеев, А.Б. Фадеев. М.: Недра, 1979. 269 с.
5. *Mogi K.* Experimental rock mechanics / K. Mogi. London: CRC Press, 2007. 375 p.
6. *Литвинский Г.Г.* Аналитическая теория прочности горных пород и массивов: монография / Г.Г. Литвинский. Донецк: Норд-Пресс, 2008. 207 с.
7. *Ставрогин А.Н.* Пластичность горных пород / А.Н. Ставрогин, А.Г. Протосеня. М.: Недра, 1979. 301 с.
8. Технология и комплексная механизация проведения горных выработок / Б.В. Бокий, Е.А. Зиминая, В.В. Смирняков, и др. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Недра, 1972. 336 с.
9. *Новожилов В.В.* О пластическом разрыхлении / В.В. Новожилов // ПММ. 1965. Т. 29. № 4. С. 75–83.
10. *Комарцов Н.М.* О трактовке модуля упругости горных пород / Н.М., Комарцов М.А. Кулагина, Б.А. Рычков // Вестник Самарского госуд. технич. ун-та. Серия Физико-математические науки. 2018. Т. 22. № 3. С. 487–503.
11. *Рычков Б.А.* О методике построения паспорта прочности горных пород / Б.А. Рычков, И.В. Гончарова, Н.М. Комарцов, М.А. Кулагина // Вестник КРСУ. 2021. Т. 21. № 4. С. 183–190.