

УДК 624.121–047.58  
DOI: 10.36979/1694-500X-2022-22-12-107-114

## ЗАКОНОМЕРНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ВОКРУГ НАПОРНОГО ТУННЕЛЯ С КРУГЛЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

*Б.А. Ботоканова, Б. Жумабаев, Ч.М. Эльдияров*

*Аннотация.* Решена инженерная задача закономерностей распределения напряженного состояния вокруг напорного туннеля с круглым поперечным сечением по методу Колосова–Мухелишвили. Туннель проведен в массиве одиночной горы, а на контур туннеля действует гидростатический напор воды. Массивы одиночных гор испытывают действие гравитационных сил и горизонтального тектонического сжатия-растяжения. Для определения полей напряжений построена модель начального напряженного состояния массивов с горным рельефом. Математическая модель создана в виде суммы полей напряжений. Исследована закономерность распределения напряжений и деформаций вокруг туннелей, когда форма поперечного сечения круглая, а гравитационная сила и тектоническое сжатие действуют в различном направлении. Решение задачи осуществлялось с помощью программной среды MathCad.

*Ключевые слова:* гидростатический напор; напряжение; деформация; туннель; упругость; конформное отображение; математическая модель.

---

## ТЕГЕРЕК КЕСИЛИШИ БАР БАСЫМДУУ ТУННЕЛДИН АЙЛАНАСЫНДА ЧЫҢАЛУУНУН БӨЛҮШТҮРҮЛҮШҮНҮН МЫЙЗАМ ЧЕНЕМДҮҮЛҮГҮ

*Б.А. Ботоканова, Б. Жумабаев, Ч.М. Эльдияров*

*Аннотация.* Тегерек кесилиши бар басым туннелинин айланасында чыңалуу абалынын бөлүштүрүлүшүнүн инженердик маселеси Колосов–Мухелишвили ыкмасы менен чечилген. Туннель жалгыз тоо массивинде жүргүзүлөт, ал эми туннельдин контуруна гидростатикалык суу басымы таасир этет. Жалгыз тоо массивдери гравитациялык күчтөрдүн жана горизонталдуу тектоникалык кысуу-созулуунун таасирин сезишет. Чыңалуу талааларын аныктоо үчүн тоо рельефи бар массивдердин баштапкы чыңалуу абалынын модели түзүлгөн. Математикалык модель чыңалуу талааларынын суммасы түрүндө түзүлгөн. Туннельдердин айланасында чыңалуу менен деформациянын бөлүштүрүлүшүнүн мыйзам ченемдүүлүгү, кесилишинин формасы тегерек болуп, тартылуу күчү жана тектоникалык кысуу ар кандай багытта аракеттенгенде изилденген. Маселени чечүү MathCad программалык чөйрөсүнүн жардамы менен ишке ашырылган.

*Түйүндүү сөздөр:* гидростатикалык басым; чыңалуу; деформация; туннель; серпилгичтүүлүк; конформдук чагылдыруу; математикалык модель.

---

## REGULARITIES OF STRESS DISTRIBUTION AROUND A PRESSURE TUNNEL WITH A ROUND CROSS SECTION

*B.A. Botokanova, B. Zhumabaev, Ch. M. Eldiarov*

*Abstract.* The article solves a problem where the method of solving engineering problems is analyzed, and the method of mathematical modeling is chosen for this. The regularities of the distribution of the stress state around the pressure tunnel with a circular cross section according to the Kolosov-Muskhelishvili method are given. The tunnel is located in the massif of a single mountain, and hydrostatic water pressure acts on the contour of the tunnel. Massifs of single mountains experience the effect of gravitational forces, and horizontal tectonic compression – stretching. To determine the stress fields, a model of the initial stress state of arrays with mountainous terrain is constructed. The mathematical model is created as a sum of stress fields. The regularity of the distribution of stresses and deformations around tunnels

is investigated when the shape of the cross-section is round, and the gravitational force and tectonic compression act in various combinations. The results of solving the problem were achieved using the MathCad software environment.

*Keywords:* hydrostatic head; stress; deformation; tunnel; elasticity; conformal mapping; mathematical model.

**Введение.** До начала строительства подземных выработок горный массив находится под воздействием начальных напряжений. В этом случае вертикальные напряжения будут равны давлению вышележащих пород. Вторичные напряжения развиваются в горном массиве в результате проходки подземной выработки или туннеля. Поле напряжений, возникающее от гидростатического напора воды на контур туннеля является третьей задачей [1].

**Метод исследования.** Метод Колосова–Мухелишвили, аппарат конформных отображений, использование программного обеспечения MathCad.

В данной статье рассматриваются закономерности распределений напряжений вокруг туннелей с круглым поперечным сечением, когда силы ориентированы горизонтально и вертикально с учетом совместного действия гравитационных сил и тектонического сжатия [1–6]. Для расчета напряженного состояния вокруг безнапорного туннеля применяем метод Колосова–Мухелишвили с привлечением конформного отображения [5, 7]. Задачи теории упругости в рамках этого метода [7] решаются наиболее эффективно при использовании аппарата конформного отображения, полубесконечные области отображают на полуплоскость вспомогательного комплексного переменного  $\zeta$ . На практике отображения в явном виде задаются функцией типа [7]:

$$Z = \alpha \times \zeta + \frac{h}{\zeta - 1}, \quad (1)$$

где  $\alpha$  и  $h$  – постоянные. Пусть для примера принято:

$$\zeta_1(\xi, \eta) = \xi + i \times \eta, \quad h = 100 \text{ м}, \quad \alpha = 50 \text{ м},$$

$$z_1(\xi, \eta) = \alpha \times \zeta_1(\xi, \eta) + \frac{h}{\zeta_1(\xi, \eta) - 1}. \quad (2)$$

Используем графическую функцию для построения трехмерной поверхности. Предварительно один из компонентов точек этой поверхности принят постоянным. Тогда будем иметь вид формы области отображения, которое осуществляется функцией (рисунок 1):

$$x(\xi, \eta) = \text{Re}(Z_1(\xi, \eta)), \quad y(\xi, \eta) = \text{Im}(z_1(\xi, \eta)), \quad z_1(\xi, \eta) = 0, 1. \quad (3)$$

$$F(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} x(\xi, \eta) \\ y(\xi, \eta) \\ z(\xi, \eta) \end{pmatrix}.$$

В качестве второго примера рассмотрим задачу анализа начального напряженного состояния одиночной горы без туннеля, которое смоделировано в с помощью функции (1). Вычисления напряжений проведены с помощью программного комплекса MathCad [8].

Числовые параметры равны:

$$K_c = 0, \quad \delta = 0, \quad \lambda = 0,33, \quad T_x = 0, \quad \gamma = 2,5 \text{ МПа}, \quad \alpha_1 = 100, \quad \beta_1 = 0.$$

В таблице 1 приведены вычисленные значения начального и максимального напряженного состояния одиночной горы без туннеля:

$$Y(\xi, \eta) = \frac{\omega(\xi, \eta) - \overline{\omega(\xi, \eta)}}{2 \times i}; \quad Y(\xi, \eta) = \frac{\omega(\xi, \eta) + \overline{\omega(\xi, \eta)}}{2 \times i}; \quad (4)$$

$$\sigma_x(\xi, \eta) = \frac{(sx(\xi, \eta) - \text{Re}(sx_1(\xi, \eta)))}{2} + T_x + A_1 \times Y(\xi, \eta); \quad (5)$$

$$\sigma_y(\xi, \eta) = \frac{\text{Im}(sx_1(\xi, \eta))}{2} + A_1 \times Y(\xi, \eta); \quad (6)$$

$$\tau_{xy}(\xi, \eta) = \frac{\text{Im}(sx_1(\xi, \eta))}{2} + A_3 \times Y(\xi, \eta); \quad (7)$$

$$r = 0 \dots 8, \quad Mt_{r,0} = X(r, 0), \quad Mt_{r,1} = Y(r, 0),$$

$$Mt_{r,2} = \sigma_x(r, 0), \quad Mt_{r,3} = \sigma_y(r, 0), \quad Mt_{r,4} = \tau_{xy}(r, 0).$$

$$F_x(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} X(\xi, \eta) \\ Y(\xi, \eta) \\ \sigma_x(\xi, \eta) \end{pmatrix} \quad F_y(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} X(\xi, \eta) \\ Y(\xi, \eta) \\ \sigma_y(\xi, \eta) \end{pmatrix} \quad F(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} X(\xi, \eta) \\ Y(\xi, \eta) \\ \tau_{xy}(\xi, \eta) \end{pmatrix}.$$

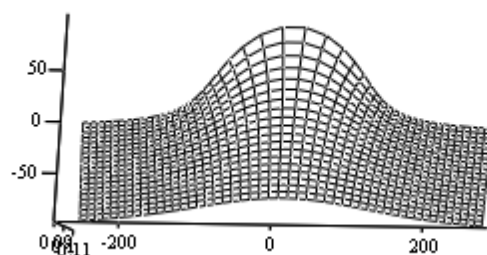


Рисунок 1 – Форма рельефа одиночной горы

Таблица 1 – Значения начального напряженного состояния одиночной горы

№	x (м)	y (м)	$\sigma_x$ (МПа)	$\sigma_y$ (МПа)	$\tau_{xy}$ (МПа)
0	0	100	-69.583	0	0
1	100	50	-78.281	-78.281	78.281
2	140	20	-156.454	-27.737	65.875
3	180	10	-85.24	-1.74	12.177
4	223.529	5.882	-45.518	-0.174	2.812
5	269.231	3.846	-27.853	-0.028	0.887
6	316.216	2.703	-18.786	$-6.413 \cdot 10^{-3}$	0.347
7	364	2	-13.542	$-1.837 \cdot 10^{-3}$	0.158
8	412.308	1.538	-10.235	$-6.268 \cdot 10^{-3}$	0.08

Согласно [9, 10], напряженное состояние вокруг напорного  $P$  туннеля состоит из трех слагаемых: начального состояния  $(S_x, S_y, S_{xy})$ , воображаемого поперечного сечения туннеля;  $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \tau_{\rho\theta}$  – поля напряжений, которое возникает от образования туннеля (отверстия);  $\sigma_\rho^H, \sigma_\theta^H, \tau_{\rho\theta}^H$  – поле напряжений от напора  $P$ , действующего нормально к контуру туннеля.

Когда на контур действует гидростатический напор  $P$ , тогда величины запишем в следующем виде:

$$X_n = -P \cos(n, x), \quad Y_n = -P \cos(n, y),$$

$$(X_n + iY_n)ds = -P(dy - idx) = Pidz,$$

$$f_1^n(\sigma) = i \int_p ((X_n + iY_n)ds = PS(\sigma + \frac{m}{\sigma})e^{-i\delta},$$

$$f_2^n(\sigma) = -PR(\sigma + \frac{m}{\sigma})e^{-i\delta}. \tag{8}$$

Интегралы Коши от (8) имеют вид:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \phi_0(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = -\phi_0(\zeta); \quad \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[ \frac{e^{2i\delta}}{\sigma} \times \frac{\sigma^2 + m}{1 - m\sigma^2} \right] \overline{\phi_0'(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = 0,$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{\psi_0(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = 0; \quad \frac{1}{2\pi i} \int_L [-R \quad \sigma] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = 0;$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \left\{ -\frac{e^{2i\delta}}{\sigma} \times \frac{\sigma^2 + m}{1 + m\sigma^2} \right\} \frac{d\sigma^2}{\sigma - \zeta} = \frac{me^{2i\delta} \Gamma R}{\zeta}; \quad \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[ -\frac{\Gamma R}{\sigma} \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \frac{\overline{\Gamma R}}{\zeta}. \tag{9}$$

Следовательно, из первого равенства (8) следует, что:

$$\phi_0(\zeta) = -\frac{1}{\zeta} [mN_1 e^{2i\delta} + N_2]. \tag{10}$$

Отсюда производная по  $\zeta$ :

$$\phi_0'(\zeta) = \frac{1}{\zeta^2} [mN_1 e^{2i\delta} + N_2]. \tag{11}$$

Вычисляемые константы для граничных условий от начального состояния:

$$N_1 = \frac{(S_x + S_y) \times R_1}{2}; \quad N_2 = \frac{(S_x - S_y - 2iS_{xy}) \times R_1}{2};$$

$$N_3 = \frac{(S_x - S_y + 2iS_{xy}) \times R_1}{2}. \quad \rho = 1...8, \quad \theta = 0...2\pi, \quad P = -10 \text{ МПа.}$$

Расчетная форма контура и исследуемая область равны:

$$\zeta(\rho, \theta) = \rho \times e^{-i\delta}, \quad z(\rho, \theta) = R_1 \times e^{-i\delta} \left( \zeta(\rho, \theta) + \frac{m}{\zeta(\rho, \theta)} \right),$$

$$\omega_1(\rho, \theta) = \left( \zeta(\rho, \theta) + \frac{m}{\zeta(\rho, \theta)} \right) \times R_1 \times e^{-i\delta},$$

$$\omega_{1\rho}(\rho, \theta) = \left( 1 - \frac{m}{\zeta(\rho, \theta)} \right) \times R_1 \times e^{-i\delta},$$

$$\omega_{1\rho\rho}(\rho, \theta) = \left( 1 - \frac{2 \times m}{\zeta(\rho, \theta)^2} \right) \times R_1, \quad \omega_{1\theta\theta}(\rho, \theta) = \left( 1 - \frac{2 \cdot m}{\zeta(\rho, \theta)^3} \right) \cdot R_1,$$

$$x_1(\rho, \theta) = \operatorname{Re}(\omega_1(\rho, \theta)), \quad y_1(\rho, \theta) = \operatorname{Im}(\omega_1(\rho, \theta)), \quad z(\rho, \theta) = 0.$$

Решение задачи и методика расчета подробно представлены в работах [9, 10], поэтому переходим к графическому оформлению решения задач с применением программного комплекса MathCad.

Вычислим распределение напряжений для контурных точек:  $S_x = 10$  МПа,  $S_y = -10$  МПа (горизонтальное растяжение и сжатие),  $S_{xy} = 0$  МПа и  $P = 0$  (таблица 2).

На рисунке 2 представлено распределение напряжений вокруг круглого туннеля от действия горизонтального и вертикального сжатия, напор воды равен нулю.

Таблица 2 – Распределение горизонтальных и вертикальных напряжений

$S_x = -10$ МПа			$S_y = -10$ МПа		
$\sigma_\rho(1, \theta)$	$\sigma_\theta(1, \theta)$	$\tau_{\rho\theta}(1, \theta)$	$\sigma_\rho(1, \theta)$	$\sigma_\theta(1, \theta)$	$\tau_{\rho\theta}(1, \theta)$
0	-30	0	0	0	0
$2.67 \cdot 10^{-15}$	-29.696	$-2.22 \cdot 10^{-15}$	$-5.329 \cdot 10^{-15}$	9.696	$2.109 \cdot 10^{-15}$
0	-28.794	$4.441 \cdot 10^{-15}$	$-3.55 \cdot 10^{-15}$	8.794	$-5.551 \cdot 10^{-15}$
$-2.22 \cdot 10^{-15}$	-27.321	0	0	7.321	0
0	-25.321	$3.109 \cdot 10^{-15}$	$-3.55 \cdot 10^{-15}$	5.321	$-2.22 \cdot 10^{-15}$
$1.33 \cdot 10^{-15}$	-22.856	0	$1.77 \cdot 10^{-15}$	2.856	0
0	-20	$2.665 \cdot 10^{-15}$	0	$5.329 \cdot 10^{-15}$	$-2.67 \cdot 10^{-15}$
$-5.33 \cdot 10^{-15}$	-16.840	0	0	-3.16	$-1.77 \cdot 10^{-15}$
$2.67 \cdot 10^{-15}$	-13.473	$5.329 \cdot 10^{-15}$	$7.105 \cdot 10^{-15}$	-6.527	$-7.105 \cdot 10^{-15}$
$-4.44 \cdot 10^{-15}$	-10	0	$2.67 \cdot 10^{-15}$	-10	0
$7.99 \cdot 10^{-15}$	-6.527	$-3.553 \cdot 10^{-15}$	$-5.33 \cdot 10^{-15}$	-13.473	$5.33 \cdot 10^{-15}$
$-6.22 \cdot 10^{-15}$	-3.160	$-1.51 \cdot 10^{-15}$	$7.105 \cdot 10^{-15}$	-16.84	$1.421 \cdot 10^{-14}$
$3.55 \cdot 10^{-15}$	0	$-8.882 \cdot 10^{-15}$	$6.66 \cdot 10^{-15}$	-20	$7.994 \cdot 10^{-15}$
$1.77 \cdot 10^{-15}$	2.856	$1.776 \cdot 10^{-15}$	$1.77 \cdot 10^{-15}$	-22.856	$-1.776 \cdot 10^{-15}$
0	5.321	$3.553 \cdot 10^{-15}$	0	-25.321	$-3.997 \cdot 10^{-15}$
$-3.55 \cdot 10^{-15}$	7.321	0	0	-27.321	0
0	8.794	$3.775 \cdot 10^{-15}$	$4.44 \cdot 10^{-15}$	-28.794	$-3.997 \cdot 10^{-15}$

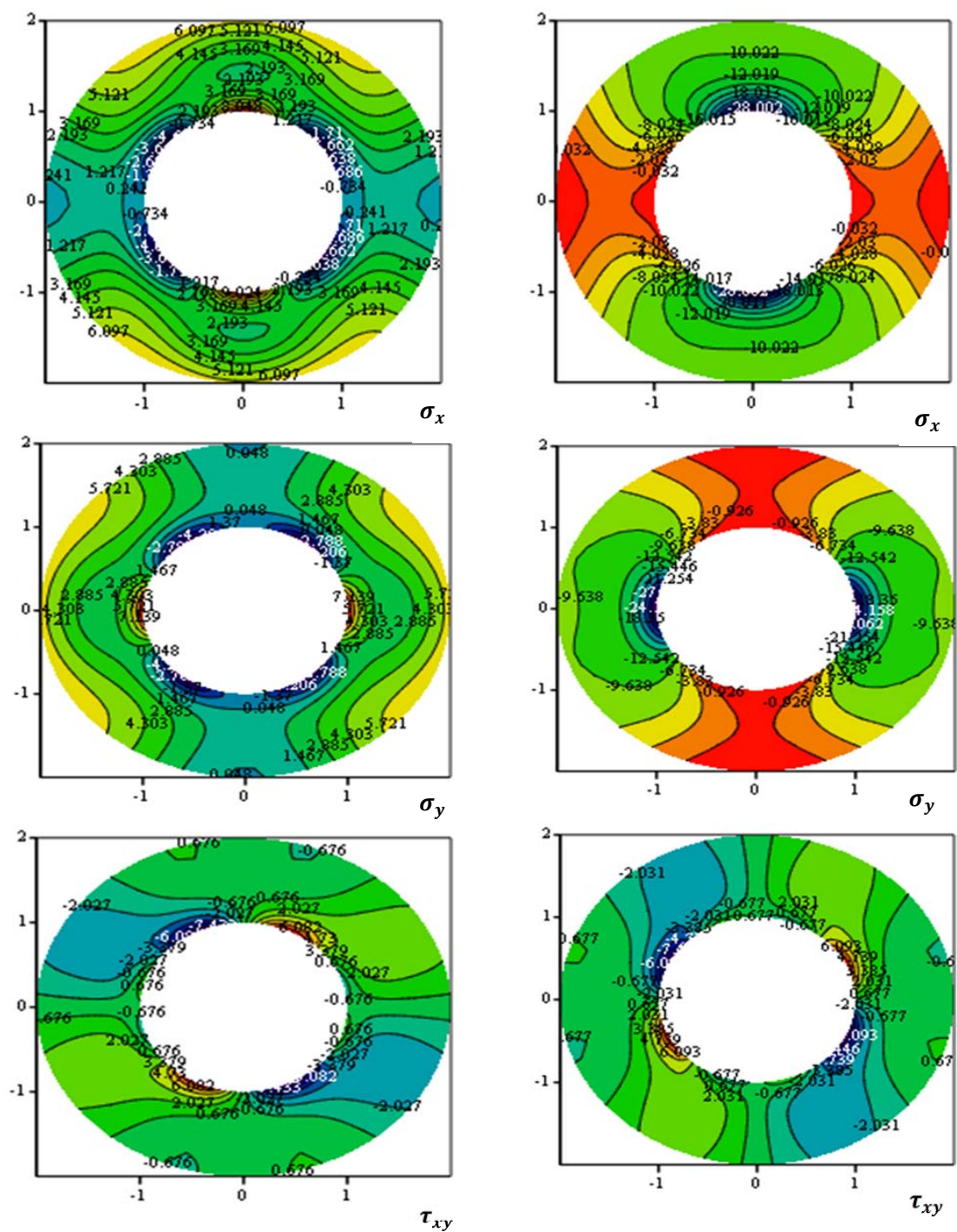


Рисунок 2 – Контурные напряжения вокруг круглого туннеля от горизонтального (слева) и вертикального (справа) сжатия (МПа)

Следовательно, приняв  $S_x = -10$  МПа,  $S_y = S_{xy} = 0$  и  $P = 0$  получим растяжения круглой выработки вдоль оси  $OX$  – это и есть задача Кирша, когда  $P = 0$  (отсутствует напор). В этом случае туннель с круглым сечением находится в массиве с горным рельефом, на контуре туннеля отсутствуют внешние силы. Вычисленные распределения напряжений  $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \tau_{\rho\theta}$  показывают, что возникающие контурные напряжения вокруг круглого туннеля зависят не только от напора воды, горизонтального, вертикального сжатия, но и происходят при чистом сдвиге [9–11]. На рисунке 3 в виде изолиний представлены результаты вычислений распределения напряжений при  $S_y = S_x = S_{xy} = 0$ , а также контурные напряжения вокруг туннеля с круглым поперечным сечением  $P = -10$  МПа.

**Заключение.** Создана математическая модель безнапорного туннеля с круговым поперечным сечением. Главная ось ориентирована произвольным углом  $\delta$  относительно горизонта и ее центр размещен в массиве одиночной горы.

В результате для туннеля с круглым сечением в контурных точках в таблицах 1 и 2 приведены два варианта для задачи Кирша – горизонтальное и вертикальное одноосное растяжение и сжатие. В этих случаях контурные напряжения  $\sigma_\rho$  и  $\tau_{\rho\theta}$  равны нулю, а напряжение  $\sigma_\theta$  отлично от нуля.

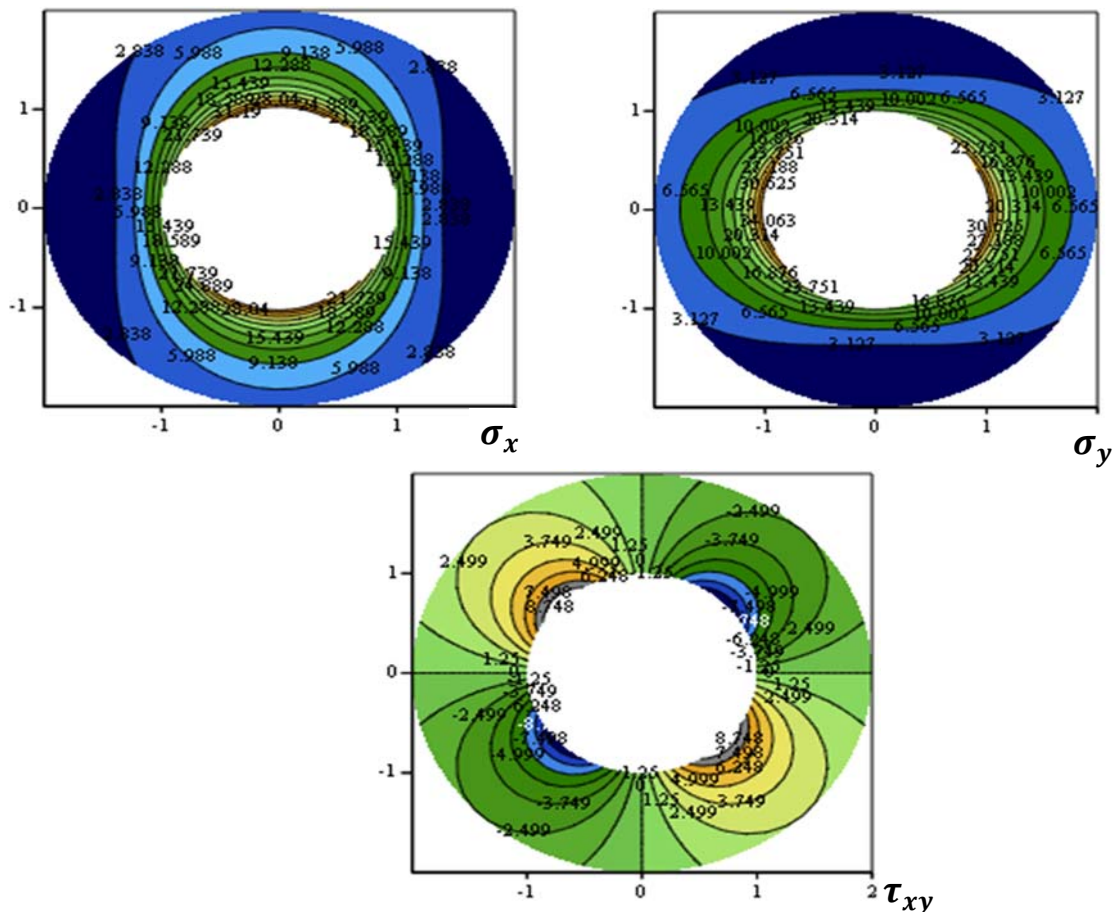


Рисунок 3 – Распределение напряжений вокруг туннеля с круглым сечением от напора воды (МПа)

Результаты решений задачи для туннеля с круглым сечением хорошо согласуются с работами других авторов.

Построенные изолинии, представленные на рисунке 3, показывают, что напор вызывает растяжения в контурных точках туннеля и сжатия в направлении перпендикулярно к контуру, когда  $P = -10$  МПа,  $m = 0$  – полная симметрия, концентрация напряжения –  $\sigma_\theta = -30$  МПа.

Поступила: 02.06.22; рецензирована: 15.06.22; принята: 17.06.22.

#### Литература

1. Введение в механику скальных пород / пер. с англ.; под. ред. Х. Бока. М.: Мир, 1983. 276 с.
2. Ботоканова Б.А. Расчет напряжённого состояния напорных гидротехнических туннелей / Б.А. Ботоканова, Б. Жумабаев // Вестник Кырг. аграр. ун-та. 2004. № 2. С. 84–87.
3. Ботоканова Б.А. Моделирование форм поперечного сечения горных выработок и нагорных плотин с помощью конформного отображения / Б.А. Ботоканова, Б. Жумабаев // Вестн. Кырг. аграр. ун-та. Матер. междунар. науч.-практ. конф. «Развитие научно-технического потенциала мелиорации и водного хозяйства на современном этапе в КР». 2009. № 5(16). С. 30–34.
4. Ботоканова Б.А. Методика и программа расчета напряжений вокруг туннелей (выработок) / Б.А. Ботоканова, Б. Жумабаев // Современные проблемы механики сплошных сред: сб. тр. междунар. конф. «Проблемы геомеханики и освоения недр». Вып. 15: Гидрогазодинамика, геомеханика и геотехнологии. Бишкек, 2012. С. 102–111.
5. Жумабаев Б. Распределение напряжений в массивах пород с гористым рельефом / Б. Жумабаев. Фрунзе: Илим, 1988. 190 с.
6. Ботоканова Б.А. Моделирование и прогноз напряженного и деформированного состояния напорного туннеля треугольным сечением / Б.А. Ботоканова, Б. Жумабаев // Вестн. науки и образования. М., 2018. Т. 2. № 6 (42). С. 88–97.
7. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мухелишвили. М.: Наука, 1966. 707 с.
8. Кирьянов Д.В. MatCad 14 / Д.В. Кирьянов. СПб.: БХВ – Петербург, 2007. 685 с.
9. Ботоканова Б.А. Распределение напряжений вокруг напорного туннеля с эллиптическим (круглым) поперечным сечением / Б.А. Ботоканова, Б. Жумабаев, А.А. Аманалиев // Современные проблемы механики сплошных сред: сб. тр. междунар. конф.: «Проблемы геомеханики и освоения недр». Вып. 13: Геомеханика массивов горных пород. Бишкек, 2011. С. 330–338.
10. Ботоканова Б.А. Методика математического моделирования напряженного состояния вокруг напорного туннеля, расположенного в горном массиве / Б.А. Ботоканова, Б. Жумабаев // Естеств. и техн. науки. М., 2018. № 8 (122). С. 235–243.
11. Ботоканова Б.А. Расчет напряжений и деформаций массивов вокруг напорного туннеля трапециевидным сечением / Б.А. Ботоканова, Б. Жумабаев // European Journal of. Technical and Natural Sciences. Vienna, 2018. № 3. С. 16–27.