УДК 52-17:626/627(575.2-17)
DOI: 10.36979/1694-500X-2023-23-8-106-110

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОРМИРОВАНИЯ ШАРОВИДНОЙ ШУГИ НА РЕКЕ АЛА-АРЧА

А.Ш. Токтогулова, Г.Д. Кабаева, Т. Жумаев

Аннотация. Рассматривается метод математического моделирования физического процесса формирования шаровидной шуги на реке Ала-Арча в период суровой зимы, из которой состоят материалы зажора. Исследование материалов затора на гидротехническом сооружении в русле реки Ала-Арча, в ночь с 12 до утра 13 января 2023 г., показало, что накопления были на участке между сооружениями и водопадом, которые перекрыли движение потока воды с зажором по всей ширине сооружения. Кроме того, в составе заторного материала не было обнаружено твердого и монолитного льда, а была слоистая плотная, но легко раздробляемая в рыхлые и в сыпучие сухие от мороза шаровидные крошки масса – шуга, формировавшаяся при низкой температуре во внутриводном турбулентном потоке воды.

Ключевые слова: математическое моделирование; зима; вода; шуга; зажор; водораспределительное сооружение; водопад; турбулентный поток воды.

АЛА-АРЧА ДАРЫЯСЫНДА ТОГОЛОК БОРПОҢ МАЙДА МУЗДАРДЫН ПАЙДА БОЛУУ КУБУЛУШУНУН МАТЕМАТИКАЛЫК МОДЕЛДӨӨ

А.Ш. Токтогулова, Г.Д. Кабаева, Т. Жумаев

Аннотация. Каткалаӊ кыш мезгилинде Ала-Арча дарыясында борпоң муз материалды түзгөн тоголок майда музчалардын пайда болушунун физикалык процессин математикалык моделдөөнүн методу каралат. Муну Ала-Арча дарыясынын нугундагы гидротехникалык түзүлүш менен шаркыратманын ортосундагы зонада, 2023-жылдын 12-январдын түнүнөн 13-январына таңына чейинки убакыттагы, түнкү суук мезгилде, суу агымынын муз тыгыны пайда болгон. Ошол тыгынды 13-январь күнү эртең менен кубаттуу техникаларды колдонуу менен тыгындарды жоюу учурунда, тыкан карап изилдеп, бул топтолгон тыгындын курамында катуу бирикме муздар болбогону, жана жалан эле катмар- катмар ныкталган, бирок оной майдаланып чачыла турган, кургак жумуру музчалардан топтолгон масса экени тастыкталган.

Түйүндүү сөздөр: математикалык моделдөө; кыш; суу; музчалар; тыгын; суу бөлүштүрүүчү түзүлүш; шаркыратма; турбуленттүү суунун агымы.

MATHEMATICAL MODELING OF FORMATION OF SPHERICAL SLUDGE ON ALA-ARCHA RIVER

A.Sh. Toktogulova, G.D. Kabaeva, T. Zhumaev

Abstract. The article considers the method of mathematical modeling of the physical process of the formation of spherical sludge on the Ala-Archa river during the period of severe winter, of which the materials of the dam are composed, is considered. This is confirmed by the study of the materials of the blockage from ice, in the area between the hydraulic structure and the waterfall in the Ala-Archa riverbed. Jamming in the movement of the blockage water flow formed during the night of 12 to the morning of January 13, 2023, with night frost in the air. On-site inspection in the morning of January 13, during the elimination of the jam by powerful technicians, it was established that there were no solid and monolithic ice in the composition of the mash material. And there were layered compacted, but easily crushed into loose and loose dry, in frosty air, spherical crumbs of the mass - sludge, formed at low temperature in the intra-water turbulent flow of water.

Keywords: mathematical modeling; winter; water; sludge; congestion; water distribution structure; waterfall; turbulent water flow.

Предметом исследования является явление формирования шаровидной шуги, из которой главным образом и состоят зажоры. В период суровой зимы из потока воды, проходящей через гидротехническое сооружение в русле реки Ала-Арча, формируется зажорная масса, из которой затем формируются заторы на пороге сооружения, под мостом автомагистрали и в других местах, где имеются препятствия на пути их движения.

В результате исследования формирования шаровидной шуги в потоке воды в русле реки Ала-Арча были отмечены ступени с лунками на дне, камни и другие неровности в продольном и поперечном сечении по ходу движения потока воды. Этот поток можно рассматривать как гидродинамическую задачу, где вода является идеальной жидкостью, сплошной средой с турбулентным режимом движения. Поэтому мы выбирали математическую модель течения потока воды в русле реки, основанную на системе дифференциальных уравнений движения Эйлера [1], которую мы уже однажды использовали в [2], и воспроизводим вновь в развёрнутом виде:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \upsilon_x}{\partial t} + \upsilon_x \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial \upsilon_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x};\\
&\frac{\partial \upsilon_y}{\partial t} + \upsilon_x \frac{\partial \upsilon_y}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial \upsilon_y}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y};\\
&\frac{\partial \upsilon_z}{\partial t} + \upsilon_x \frac{\partial \upsilon_z}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_z}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Система состоит из трёх дифференциальных уравнений установившегося движения идеальной жидкости с четырьмя неизвестными параметрами уравнений движения $p; \upsilon_x; \upsilon_y; \upsilon_z$. Дополняя системы уравнений (1) с четвертым дифференциальным уравнением неразрывности потока жидкости [2 (9)], при необходимости в определения выше указанные параметры системы (1).

Чтобы описать турбулентное движение течения воды по Эйлеру, нужно задать поле скоростей, т. е. скорость потока в каждой точке пространства и каждый момент времени:

$$\upsilon_k = f_k\left(x_j, t\right), \tag{2}$$

где $x_j = x_j\left(t\right)$, или скорость в векторной форме $\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, аналогично ускорение по формуле: $\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$.

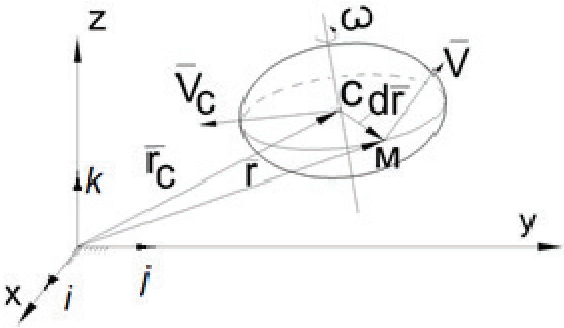

Рисунок 1 – Материальная точка М, центр вращения С

Задаём пространственное поле скоростей, занятое движущимся турбулентным потоком воды, придаём ему физический смысл введением угловой скорости ω_{xyz} и углового ускорения ε_{xyz} материальной точки в пространственной системе координат *x, y* и *z* с единичными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, направленными по осям декартовой системы координат. Из теоретической механики известно, что вращательная скорость в пространстве выделенного объёма с центром вращения в точке С каждой материальной точки (кристалл льда), имея центр масс и ось вращения с угловой скоростью ω, лежит в достаточно малой окрестности $d\vec{r}$ от центра масс [3]. Тогда вектор скорости $\vec{\upsilon}$ ($\vec{\upsilon} \equiv \overline{V}$; $\vec{\upsilon}_c \equiv \overline{V}_c$) материальной точки М с центром в точке С равен сумме скоростей векторной линейной $\vec{\upsilon}_c$ и векторной вращательной $\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial \vec{r}} \cdot d\vec{r}$, т. е. согласно рисунку 1 получим: $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_c + \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial \vec{r}} \cdot d\vec{r}$, где $d\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_c$.

В проекциях на плоскости $(\vec{j}, \vec{k})$:

$$\upsilon_j = \upsilon_{cj} + \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_k} \cdot dx_k . \tag{3}$$

Последовательно преобразуем полученное выражение (3), добавив $\pm \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_j}$:

$$\begin{aligned} \upsilon_j &= \upsilon_{cj} + \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_k} \cdot dx_k = \upsilon_{cj} + 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_k} \cdot dx_k = \upsilon_{cj} + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_k} \right) \cdot dx_k = \\ & \upsilon_{cj} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_k} - \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_j} \right) + \left(\frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_k} + \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_j} \right) \right) \cdot dx_k = \\ &= \upsilon_{cj} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_k} - \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_j} \right) \cdot dx_k + \left(\frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_k} + \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_j} \right) \cdot dx_k \right). \end{aligned} \tag{4}$$

Суммарное выражения (3) упрощается, если обозначить через ω_{jk} и ε_{jk}:

$$\omega_{jk} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_k} - \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_j} \right); \tag{5}$$

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_k} + \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_j} \right); \tag{6}$$

$$\upsilon_j^{\omega} = \omega_{jk} \cdot dx_k ; \tag{7}$$

$$\upsilon_j^{\varepsilon} = \varepsilon_{jk} \cdot dx_k , \tag{8}$$

тогда выражение (3) примет упрошенный вид: $\upsilon_j = \upsilon_{Cj} + \upsilon_j^{\omega} + \upsilon_j^{\varepsilon}$.

Физический смысл введённых математических обозначений (5) и (6) величин ω_{jk} и ε_{jk} является тензором турбулентного движения шуги в внутриводном пространстве с вращательной скоростью ω_{jk}. Математическое выражение (3) называется тензором вихря.

Из курса теоретической механики известно [3, с. 211], что когда единичные векторы $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ направлены по осям декартовой системы координат, вихрь вектора скорости (вращательная скорость кристалла льда – шуги вокруг своего центра масс) определяется выражением:

$$\vec{\upsilon}=\vec{\omega}xd\vec{r}=\begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \omega_i & \omega_j & \omega_k\\ dx & dy & dz\end{bmatrix}= \\ =\vec{i}\cdot(\omega_y\cdot dz-\omega_z\cdot dy)+\vec{j}\cdot(\omega_{z\cdot}\cdot dx-\omega_x\cdot dz)+\vec{k}\cdot(\omega_x\cdot dy-\omega_y\cdot dx). \qquad (9)$$

Формула (9) для проекций вектора скорости в декартовой системе координат будет в виде:

$$\upsilon_x=\omega_y\cdot dz-\omega_z\cdot dy;\ \upsilon_y=\omega_{z\cdot}\cdot dx-\omega_x\cdot dz;\ \ \upsilon_z=\omega_x\cdot dy-\omega_y\cdot dx. \qquad (10)$$

Определим вектор окружной скорости элементов сплошной среды в турбулентном потоке воды, который и является математической моделью формирования шаровидных льдин – шуги, при температуре внутриводного потока на равнинных реках $(-0,02...-0,03°C)$; на горных реках $(-0,05...-0,08°C)$, [4, с. 11], согласно формуле (5) из работы [3, с. 211]:

$$\vec{\omega}=\frac{1}{2}\cdot окруж.\vec{\upsilon}=\frac{1}{2}(\Delta\cdot\vec{\upsilon})=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \upsilon_x & \upsilon_y & \upsilon_z\end{bmatrix}. \qquad (11)$$

Данный вектор (11) называют вихрем вектора скорости, по существу он совпадает с вектором угловой скорости в пространстве потока холодной воды, где из кристаллов льдинок формируются шаровая шуга при условии внутриводные температуры: $T_{воды}\prec 0°C.$

Благодаря форме русла реки со ступенями и лунками, с нагромождением камней на дне, отколовшиеся от покрова льдинки попадают в холодное водяное вихревое движение и начинают тоже двигаться вихреобразно, и, смерзаясь между собой, образуют шугу сферической формы. Вода не замерзает из-за турбулентности течения (за счёт межмолекулярного трения воды выделяется тепло). Атмосферный холодный воздух, поглощая тепло из воды с турбулентным движением, превращается в пар, возвращаясь с поглощённым холодом на поверхность текущего потока, формирует ледяную плёнку. Плёнка, наращиваясь слоями, давит на непрочный покров льда и разламывает его. При этом атмосфера, снабжая холодным воздухом, постоянно обеспечивает потенциально холодную энергию. Поверх потока набирается шуга, формируются зажоры, превращаясь в лёд, пока ещё рыхлый (на реке Ала-Арча). Основное математическое выражение, описывающее это морозное для атмосферы природное явление, можно записать в виде формулы:

$$T_{атм}\prec 0°C. \qquad (12)$$

Выводы. В результате проведённых исследований была составлена математическая модель (11) формирования шуги шарообразной формы, из которой состоят зажоры в реке при минусовой температуре воздуха зимой (12). В дальнейшем необходимо исследовать процесс формирования затора в виде закупорки потока водяного зажора на участке русла реки Ала-Арча, которые происходят на гидротехническом сооружении с пешеходным мостом, посредством накопления зажорной массы, в виде «головы и тела затора», составленные, главным образом, из шуги шарообразной формы. В итоге разработать новые способы и устройства, предотвращающие формирование заторов на русле реки Ала-Арча.

Поступила: 11.07.23; рецензирована: 25.07.23; принята: 28.07.23.

Литература

1. *Чугаев Р.Р.* Гидравлика / Р.Р. Чугаев. Л.: «Энергия», 1975. 600 с.
2. *Токтогулова А.Ш.* Математическое моделирование физического процесса в гидротехническом сооружении / А.Ш. Токтогулова, Г.Д. Кабаева, Т. Жумаев // Вестник КРСУ. 2023. Т. 23. № 4. С. 137–152.
3. *Добронравов В.В.* Курс теоретической механики / В.В. Добронравов, Н.Н. Никитин. М.: Высшая школа, 1983. 556 с.
4. *Бузин В.А.* Зажоры и заторы льда на реках России / В.А. Бузин. СПб., 2015. 242 с.